

Capitolo 4

Applicazioni numeriche

La teoria generale presentata nei Capitoli 2 e 3 viene ora applicata mediante lo sviluppo di analisi numeriche utilizzando un codice commerciale agli elementi finiti. Il presente capitolo è suddiviso in due sezioni, in particolare nella prima vengono effettuate le analisi numeriche di stabilità, sia macroscopica che microscopica, con un particolare riferimento a due diversi tipi di microstrutture: i compositi a matrice porosa e i compositi che presentano all'interno un'inclusione la quale può essere più o meno rigida. Nella seconda sezione, si studierà la validità del modello di omogeneizzazione proposto nel Capitolo 3, effettuando un confronto in termini di energia di rilascio, valutata al tipo delle microfratture attraverso la tecnica dell'integrale J , tra la tecnica di omogeneizzazione e l'analisi diretta facendo riferimento ad una struttura composita costituita da un arrangiamento regole di 5x5 celle unitarie di tipo poroso.

4.1 Analisi di stabilità

4.1.1 Implementazione computazionale

L'analisi di stabilità illustrata nel Capitolo 2 viene ora sviluppata mediante un modello agli elementi finiti basato su un approccio agli spostamenti. Le analisi numeriche sono state effettuate in uno stato di deformazione piano, utilizzando il codice commerciale COMSOL MULTIPHYSICSTM.

Lo scopo di tale modello, il quale è accoppiato in un solo senso, è di determinare in maniera sequenziale il percorso di soluzione fondamentale ed i problemi linearizzati di equilibrio ed agli autovalori in corrispondenza di tale percorso fondamentale, al fine di

poter determinare i moduli tangenti omogeneizzati e il minimo autovalore associato al funzionale di stabilità strutturale microscopico.

Sia per quanto riguarda l'analisi di stabilità macroscopica che microscopica, il primo passo da realizzare a livello numerico è quello di ricavare la configurazione deformata per la cella unitaria. A tale fine bisogna risolvere il problema variazionale espresso dalla (2.16), il quale viene inserito in COMSOL attraverso la sua scrittura in forma debole. La configurazione deformata verrà ricavata lungo il percorso di soluzione fondamentale per una assegnato percorso di carico macroscopico $\bar{F}(\beta)$. Inoltre la microstruttura è soggetta a condizioni al contorno di tipo periodico, le quali vengono realizzate in COMSOL mediante la tecnica dell'estrusione delle variabili accoppiate. Una volta resi disponibili (estrusi) gli spostamenti finiti o incrementali definiti sulle porzioni di contorno negative della microstruttura indicata con $\partial k^N V_{(i)}^-$, sulle porzioni positive (opposte), indicata con $\partial k^N V_{(i)}^+$ le condizioni periodiche sono imposte come vincoli deboli sul dominio di destinazione mediante la tecnica dei moltiplicatori di *Lagrange*. La condizione di periodicità quindi viene realizzata mediante la seguente espressione:

$$u(X^+) = u(X^-) + (\bar{F} - I)(X^+ - X^-), \quad (4.1)$$

dove il simbolo + indica il lato della microstruttura di normale positiva, mentre il simbolo – indica il lato della microstruttura di normale negativa.

Al fine di eliminare i possibili moti rigidi da parte della microstruttura bisogna imporre che il campo di fluttuazioni nei quattro nodi della microstruttura è pari a zero. Tale condizione viene imposta attraverso la seguente equazione:

$$u(X) = (\bar{F} - I)(X). \quad (4.2)$$

Si assume inoltre che lungo tale percorso di carico la risposta per la microstruttura sia unica. Al fine di discretizzare il percorso di carico viene utilizzato un solutore parametrico, settando il parametro di carico con intervalli regolari pari a $\Delta\beta = 10^{-3}$.

Il secondo passo da effettuare nell'analisi numerica è quello di ricavare i moduli macroscopici omogeneizzati, ed a tale fine la procedura numerica deve risolvere il problema incrementale di equilibrio per la cella unitaria, imponendo deformazioni macroscopiche unitarie ($\ddot{\mathbf{F}} = \mathbf{I}^{hk}$, $h,k=1,2,3$) superimposte al percorso di soluzione fondamentale. Tale problema viene risolto dalla discretizzazione del seguente problema variazionale:

$$\int_{V_{(i)}} C^R(\beta, \mathbf{X}) [\mathbf{I}^{hk} + \nabla \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}^{hk}}] \cdot \nabla \delta \dot{\mathbf{w}} dV = 0 \quad \forall \delta \dot{\mathbf{w}} \in H^{1,p}(V_{(i)\#}) \quad (4.3)$$

Tramite tale procedura è possibile pertanto ricavare i moduli macroscopici omogeneizzati dalla relazione (2.20), oppure dalla relazione (2.24).

Al fine di eliminare i possibili moti rigidi da parte della microstruttura bisogna imporre che il campo di fluttuazioni nei quattro nodi della microstruttura è pari a zero. Tale condizione viene imposta attraverso la seguente equazione: $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{X}$.

4.1.2 Procedura numerica per valutare la stabilità microscopica

La procedura che consente di studiare l'instabilità microscopica è stata realizzata in COMSOL attraverso un problema accoppiato. La presente procedura accoppia la soluzione ricavata dal problema incrementale con il problema agli autovalori fornito dalla (2.41). Pertanto ricavata la risposta dal problema incrementale di equilibrio, attraverso tale problema agli autovalori si ricava il valore del parametro di carico per il quale il funzionale di stabilità possiede un autovalore nullo su tutti i possibili assemblaggi di celle unitarie.

Essendo il dominio di definizione variabile, nel senso che l'assemblaggio di celle può tendere anche all'infinito, è stato necessario creare una procedura numerica, descritta di seguito.

Per un fissato assemblaggio di celle unitarie viene determinato il più piccolo valore del parametro di carico β per il quale il minimo autovalore associato al funzionale di stabilità

è nullo. Questo preciso valore del parametro di carico prenderà il nome di $\beta^k c$. Inoltre a tale autovalore, dalla discretizzazione del problema di minimizzazione (2.41), verrà associato un autovettore. Successivamente aumentando il numero di assemblaggio di celle unitarie, il minimo valore di $\beta^k c$ per tutti i possibili modi di instabilità indicato con βc determinerà l'assemblaggio ottimale di celle unitarie. Pertanto al valore del parametro di carico βc corrisponde la perdita di stabilità microscopica.

4.1.3 Procedura numerica per valutare la stabilità macroscopica

L'analisi di stabilità macroscopica è stata sviluppata a livello numerico attraverso una procedura realizzata attraverso il linguaggio COMSOL SCRIPTTM, il quale interfaccia con il modello generato in COMSOL MULTIPHYSICSTM. Una volta ricavato il problema incrementale di equilibrio per la cella unitaria, e quindi i moduli macroscopici omogeneizzati, è stato realizzato un codice (Appendice 4.3) in grado di ricavare l'evoluzione del minimo autovalore associato alle condizioni di stabilità macroscopiche. La condizione di ellitticità forte macroscopica (2.48), rappresenta anche la condizione di definitezza positiva del tensore acustico $\bar{\mathcal{Q}}_{0ih}(\bar{n}) = \bar{C}_{0ijk}^R \bar{n}_j \bar{n}_k$ per ogni direzione di propagazione \bar{n} . Le componenti del tensore acustico vengono di seguito riportate:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{Q}}_{011} &= \bar{C}_{01111} \bar{n}_1^2 + \bar{C}_{01112} \bar{n}_1^2 + \bar{C}_{01212} \bar{n}_2^2 + \bar{C}_{01211} \bar{n}_2 \bar{n}_1 \\ \bar{\mathcal{Q}}_{012} &= \bar{C}_{01121} \bar{n}_1^2 + \bar{C}_{01122} \bar{n}_1 \bar{n}_2 + \bar{C}_{01222} \bar{n}_2^2 + \bar{C}_{01221} \bar{n}_2 \bar{n}_1 \\ \bar{\mathcal{Q}}_{022} &= \bar{C}_{02121} \bar{n}_1^2 + \bar{C}_{02122} \bar{n}_1 \bar{n}_2 + \bar{C}_{02222} \bar{n}_2^2 + \bar{C}_{02221} \bar{n}_2 \bar{n}_1 \\ \bar{\mathcal{Q}}_{021} &= \bar{C}_{02111} \bar{n}_1^2 + \bar{C}_{02112} \bar{n}_1 \bar{n}_2 + \bar{C}_{02212} \bar{n}_2^2 + \bar{C}_{02211} \bar{n}_2 \bar{n}_1\end{aligned}\tag{4.4}$$

dove $\bar{n}_1 = \cos(\theta)$, $\bar{n}_2 = \sin(\theta)$. Se il tensore acustico è semplicemente non singolare, si dice che il tensore acustico è ellittico, ovvero:

$$\det \bar{\mathcal{Q}}_0(\bar{n}) \neq 0\tag{4.5}$$

L'instabilità macroscopica viene determinata monitorando il più piccolo auto valore associato al tensore acustico per ogni direzione di propagazione \bar{n} , attraverso il seguente problema agli auto valori:

$$\bar{\Lambda}(\bar{F}(\beta)) = \min_i \left[\min_{\|\bar{n}\|=1} \lambda_i^{\bar{Q}(\bar{n})}(\beta) \right] \quad \text{con } \lambda_i^{\bar{Q}(\bar{n})} | (\bar{Q}_0(\bar{n}) - \lambda_i^{\bar{Q}(\bar{n})} \mathbf{I}) \hat{\Phi} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

La direzione di propagazione viene realizzata a livello numerico suddividendo l'angolo 2π in cento parti. Pertanto la procedura numerica riscontra la presenza di un'instabilità macroscopica quando, per un assegnato valore del parametro di carico, il più piccolo autovalore associato all'equazione (4.6) si annulla.

In modo analogo, l'innescò dell'instabilità macroscopica con riferimento alle misure coniugate di stabilità è determinata monitorando il più piccolo autovalore ricavato dalla seguente relazione:

$$\bar{\Lambda}^f(\bar{F}(\beta)) = \min \left[\lambda_i^{\bar{C}_0^f}(\beta) \right] \quad \text{con } \lambda_i^{\bar{C}_0^f} | (\bar{C}_0^f - \lambda_i^{\bar{C}_0^f} \mathbf{I}) \hat{\Phi} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

dove \bar{C}_0^f denota un tensore del quarto ordine al quale si associa il seguente problema agli autovalori:

$$\left(\begin{bmatrix} \bar{C}_{01111}^f & \bar{C}_{01122}^f & 2\bar{C}_{01112}^f \\ \bar{C}_{01122}^f & \bar{C}_{02222}^f & 2\bar{C}_{02212}^f \\ 2\bar{C}_{01112}^f & 2\bar{C}_{02212}^f & 2\bar{C}_{01212}^f \end{bmatrix} - \lambda_i^{\bar{C}_0^f} \text{diag}\{1,1,1\} \right) \begin{Bmatrix} \tilde{\Phi}_{11}^{(i)} \\ \tilde{\Phi}_{22}^{(i)} \\ \tilde{\Phi}_{12}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.8)$$

Pertanto dall'equazione (4.8), associandone una specifica misura di deformazione, si è in presenza dell'instabilità macroscopica quando, per il più piccolo valore del parametro di carico, si annulla il più piccolo autovalore.

Considerazioni analoghe possono essere ripetute dall'applicazione della condizione (2.51), di cui se ne riporta il problema agli autovalori:

$$\left(\begin{bmatrix} \bar{C}_{1111}^R & \bar{C}_{1122}^R & \bar{C}_{1112}^R & \bar{C}_{1121}^R \\ \bar{C}_{2211}^R & \bar{C}_{2222}^R & \bar{C}_{2212}^R & \bar{C}_{2221}^R \\ \bar{C}_{1211}^R & \bar{C}_{1222}^R & \bar{C}_{1212}^R & \bar{C}_{1221}^R \\ \bar{C}_{2111}^R & \bar{C}_{2122}^R & \bar{C}_{2112}^R & \bar{C}_{2121}^R \end{bmatrix} - \lambda_i^{\bar{C}^R} \text{diag}\{1,1,1,1\} \right) \begin{Bmatrix} \Phi_{11}^{(i)} \\ \Phi_{22}^{(i)} \\ \Phi_{12}^{(i)} \\ \Phi_{21}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.9)$$

4.1.4 Modello costitutivo e microstruttura adottata

Sono state prese in considerazione tre tipi di microstrutture di tipo bidimensionale. In particolare la prima microstruttura adottata fa riferimento ai materiali omogenei, la seconda ai materiali porosi e la terza ai materiali che presentano una inclusione la quale può essere più o meno rigida.

La lunghezza del lato dell'RVE oggetto di studio è stata indicata con h e viene posta unitaria, mentre il diametro dell'elemento circolare rappresentante il vuoto o l'eventuale inclusione ha dimensione pari a $d=0.5h$. La formulazione teorica adottata fa riferimento a materiali caratterizzati da un legame costitutivo incrementalmente lineare, adottando per ogni micro costituente due tipi di legame costitutivo.

Il primo legame costitutivo compressibile (Gent,1996), ha la seguente densità di energia di deformazione:

$$W = -\frac{\mu}{2} \left[J_m \ln \left(1 - \frac{\|\mathbf{F}\|^2 - 3}{J_m} \right) + 2 \ln J \right] + \left(\frac{k - \mu}{2} - \frac{\mu}{J_m} \right) (J - 1)^2 \quad (4.10)$$

dove μ e k rappresentano rispettivamente il modulo tangenziale e volumetrico, J_m rappresenta una costante collegata alla deformazione di saturazione del solido posta pari a 50. Inoltre nella presente relazione si ha che $J = \det(\mathbf{F})$ il quale rappresenta il determinante del gradiente della deformazione e inoltre:

$$\|\mathbf{F}\|^2 = I_1 = \text{tr} \mathbf{C} \quad (4.11)$$

il quale rappresenta il primo invariante della deformazione che può essere scritto anche in funzione del tensore destro di *Cauchy*. Inoltre le seguenti assunzioni:

$$\mu > 0, \quad k > \left[(J_m + 2) / J_m \right] \mu, \quad J_m > 0 \quad (4.12)$$

garantiscono la policonvessità dei solidi Gent (Ball,1977), assicurando che la condizione di ellitticità forte sia soddisfatta per il materiale microscopico.

Il secondo legame costitutivo compressibile tipo Neo-Hookean, ha la seguente densità di energia di deformazione:

$$W = \frac{\mu}{2} \left[\left(\|\mathbf{F}\|^2 - 3 \right) - 2 \ln(\det \mathbf{F}) \right] + \frac{k - \mu}{2} (\det \mathbf{F} - 1)^2 \quad (4.13)$$

Le condizioni $\kappa/\mu = 10, \kappa - \mu = \lambda > 0, \mu > 0$ assicurano che la condizione di ellitticità forte sia soddisfatta.

Sono stati inoltre presi in considerazione due percorsi di carico, guidati attraverso il parametro β . I percorsi di carico analizzati sono rispettivamente di tipo monoassiale (in trazione e in compressione) ed equibiassiale (in trazione e in compressione):

$$\bar{\mathbf{F}}(\beta) = \begin{bmatrix} 1+\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{monoassiale}, \quad (4.14a)$$

$$\bar{\mathbf{F}}(\beta) = \begin{bmatrix} 1+\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1+\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{equibiassiale}. \quad (4.14b)$$

L'analisi di stabilità microscopica coinvolge un assemblaggio crescente di celle unitarie, sottolineando che nelle analisi numeriche effettuate nel presente lavoro il massimo assemblaggio di celle considerato è pari a 20x20. Questo assemblaggio viene assunto quale ragionevole approssimazione per il dominio di dimensione infinita richiesto per l'analisi di stabilità microscopica ed inoltre fornisce valori per il parametro di carico critico per i modi di instabilità globali sufficientemente vicini a quelli ottenuti usando la misura di stabilità macroscopica (2.48).

In particolare, i modi di instabilità sono stati classificati come globali, quando considerando un assemblaggio di celle unitarie in aumento il più piccolo valore del parametro di carico per il quale il minimo autovalore associato al funzionale di stabilità si annulla. Tale parametro di carico corrisponde alla perdita di ellitticità macroscopica, a meno di un errore numerico dato dalla seguente condizione: $(\beta_{cM} - \beta_c)/\beta_{cM} \times 100 = 0.1$.

4.1.5 Microstruttura omogenea- Gent

Il primo caso oggetto di studio è quello di una microstruttura che sia rappresentativa di un materiale omogeneo, il quale rappresenta un caso particolare in quanto le proprietà macroscopiche e microscopiche coincidono. Comunque, è importante sottolineare che le analisi numeriche effettuate su questo tipo di microstruttura sono importanti al fine di ricavare delle informazioni utili per le successive analisi.

Per quanto riguarda la discretizzazione agli elementi finiti è stata utilizzata una mesh triangolare ad elementi quadratici come rappresentato in Figura 4.1. La mesh inoltre è costituita da 998 elementi e da 4114 gradi di libertà.

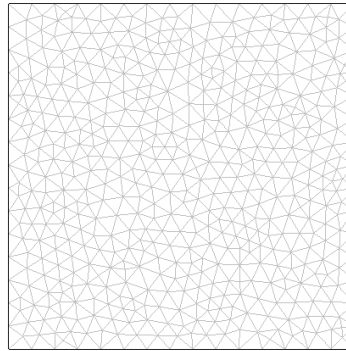


Figura 4.1 Mesh adottata per la microstruttura omogenea.

In Figura 4.2 è rappresentata la risposta macroscopica, nel caso di uno stato di deformazione piano, sia per il percorso di carico monoassiale che per quello equibiassiale. La risposta viene plottata in termini della componente normale del primo tensore di Piola-Kirchhoff \bar{T}_{R11} , normalizzata rispetto al modulo tangenziale μ (modulo tangenziale della matrice), rispetto al parametro di carico β . La figura evidenzia come in trazione è il percorso di carico equibiassiale che presenta la risposta più rigida, contrariamente in compressione, trascurando piccoli valori del carico, è il percorso di carico monoassiale che presenta la risposta più rigida.

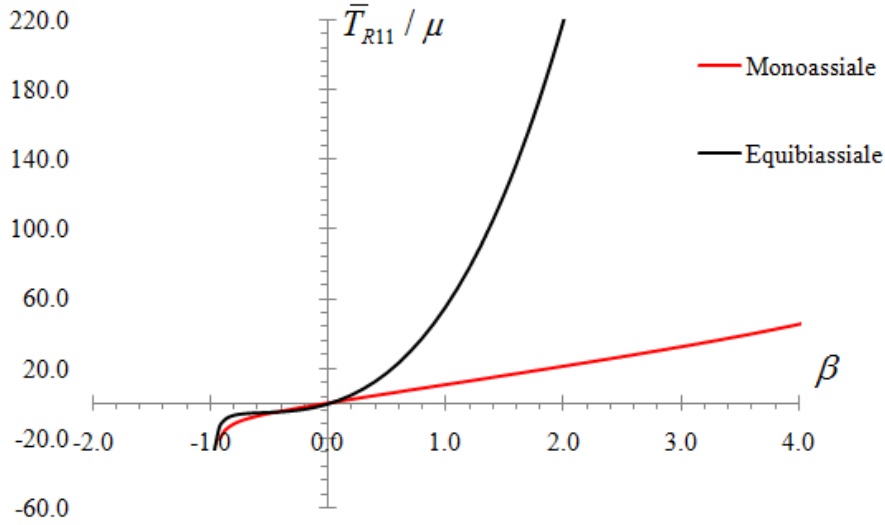


Figura 4.2 Risposta costitutiva per la microstruttura omogenea (Gent).

Nelle Figure 4.3-4.4 vengono presentate rispettivamente le analisi di stabilità per il percorsi di carico monoassiale (trazione e compressione) ed equibiassiale (trazione e compressione). I grafici evidenziano che la condizione di stabilità macroscopica (2.48) è sempre soddisfatta. Dalle analisi risulta inoltre dal teorema di *Van Hove* modificato, valido per il tensore dei moduli nominali costante fortemente ellittico e per un dominio rettangolare (Rhyzak,1993), che la condizione di stabilità microscopica è anche soddisfatta:

$$\text{costante } C_0^R \Rightarrow \int_V C_0^R [\nabla \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{x})] \cdot \nabla \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) dV > 0 \quad \forall \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \in V\#, \nabla \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \Rightarrow \Lambda(\bar{\mathbf{F}}) > 0 \quad (4.15)$$

Nei grafici vengono anche presentate le condizioni di stabilità macroscopiche associate alle diverse misure di deformazione coniugate. Per quanto riguarda la trazione, per entrambi i percorsi di carico, la risposta associata a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$, $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(0)}$ risulta sempre stabile. In compressione, per entrambi i percorsi di carico la risposta risulta stabile quando è associata a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(1)}$. Inoltre come ci si poteva aspettare la risposta macroscopica di stabilità è violata in compressione a 0° a causa di fenomeni di instabilità rotazionali.

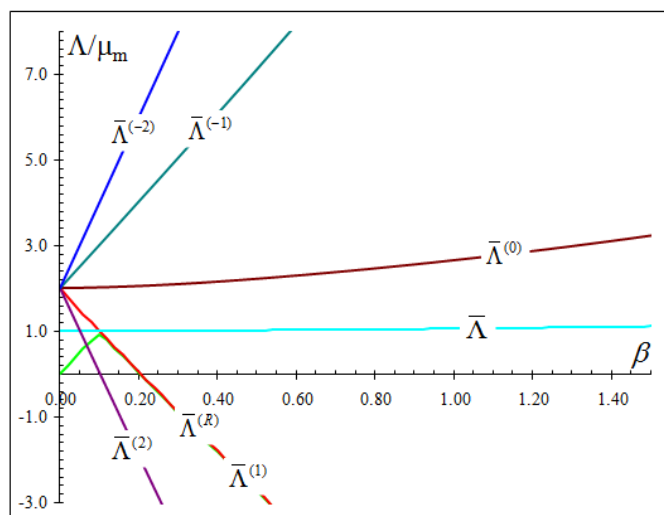


Figura 4.3a Analisi di stabilità per la microstruttura omogenea (Gent) per il percorso di carico monoassiale in trazione.

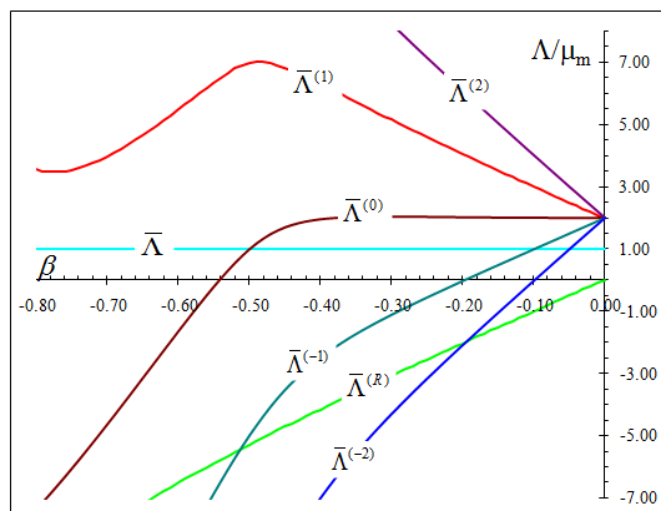


Figura 4.3.b Analisi di stabilità per la microstruttura omogenea (Gent) per il percorso di carico monoassiale in compressione.

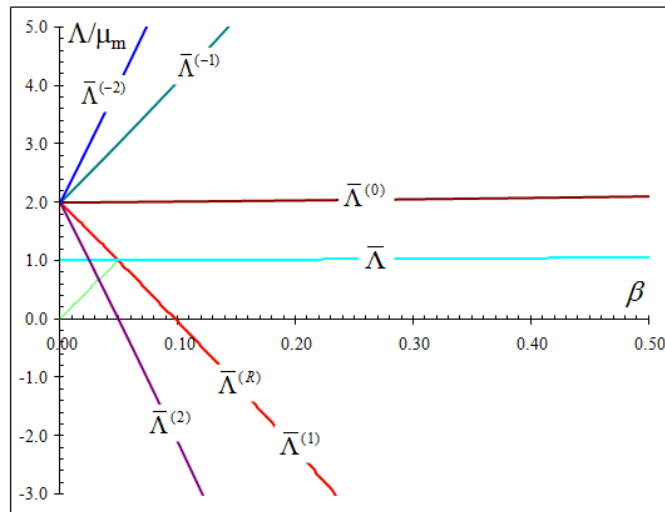


Figura 4.4a Analisi di stabilità per la microstruttura omogenea (Gent) per il percorso di carico equibiassiale in trazione.

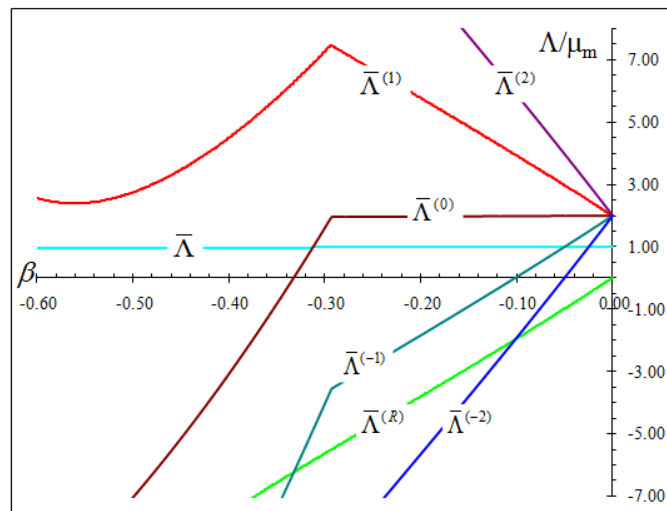


Figura 4.4b Analisi di stabilità per la microstruttura omogenea (Gent) per il percorso di carico equibiassiale in compressione.

4.1.6 Microstruttura porosa-Gent

Il secondo caso che viene investigato è quello di una microstruttura che sia rappresentativa di un materiale composito poroso. La microstruttura presenta una porosità iniziale pari a $\pi/16$. Per quanto riguarda la discretizzazione agli elementi finiti è

stata utilizzata una mesh triangolare ad elementi quadratici come rappresentato in Figura 4.5. La mesh inoltre è costituita da 3810 elementi e caratterizzata da 15616 gradi di libertà.

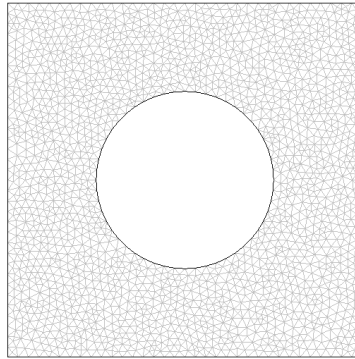


Figura 4.5 Mesh adottata per la microstruttura porosa.

In Figura 4.6 viene rappresentata la risposta macroscopica per la presente microstruttura nel caso di uno stato di deformazione piano. La risposta è plottata in termini della componente normale del primo tensore di Piola-Kirchhoff \bar{T}_{RII} , adimensionalizzata rispetto modulo tangenziale μ (modulo tangenziale della matrice), rispetto al parametro di carico β .

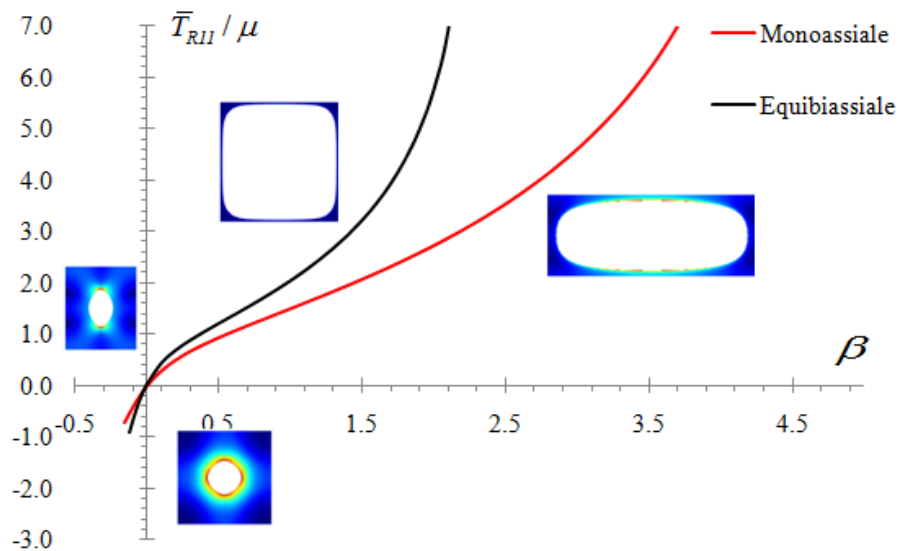


Figura 4.6 Risposta costitutiva per la microstruttura porosa (Gent).

La risposta macroscopica è determinata dall'effetto non lineare del legame costitutivo e da quello relativo all'incremento della porosità. Inoltre, a causa dell'ovalizzazione dei fori la risposta per il percorso di carico equibiassiale risulta molto più rigida rispetto a quella ricavata attraverso il percorso di carico monoassiale in trazione. Nelle Figure 4.7-4.8 vengono presentate le analisi di stabilità per entrambi i percorsi di carico, le quali evidenziano come l'innescò della instabilità microscopica (la quale si ha per un valore del parametro di carico pari a $\beta_c^- = -0.07595$ per il percorso di carico monoassiale e per un valore del parametro di carico pari a $\beta_c^- = -0.1435$ per il percorso di carico equibiassiale), sempre precede la perdita della ellitticità forte macroscopica (equazione 2.48) con un modo di instabilità microscopico che è periodico ottenuto su un assemblaggio 2x2 di celle unitarie. A tal riguardo nelle Figure 4.9a-4.10a vengono presentati i modi di instabilità microscopici in compressione per entrambi i percorsi di carico.

Dalle figure si osserva come il modo biforcuto implica un'alternanza nell'ovalizzazione dei vuoti. Per quanto riguarda la trazione, per entrambi i percorsi di carico, il primo modo di instabilità è di natura globale come evidenziato dalle Figure 4.9b-4.8b, e di conseguenza la perdita di stabilità macroscopica (equazione 2.48) coincide con quella microscopica e si ha per un valore del parametro di carico pari a $\beta_c^+ = 1.695$ per il percorso di carico equibiassiale e per un valore del parametro di carico pari a $\beta_c^+ = 3.515$ per il percorso di carico monoassiale.

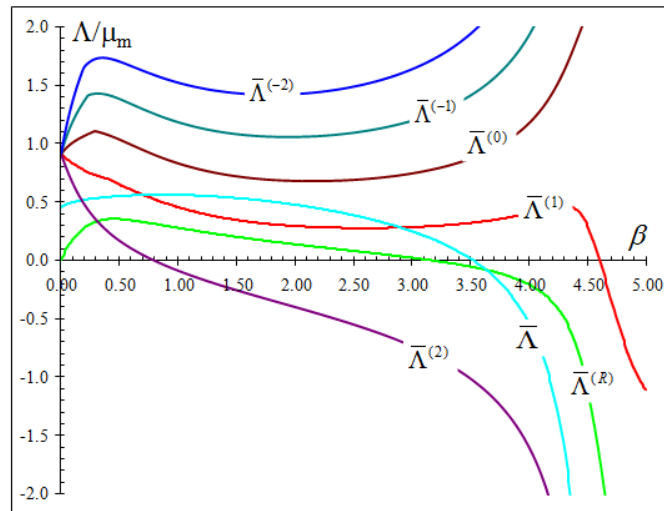


Figura 4.7a Analisi di stabilità per la microstruttura porosa (Gent) per il percorso di carico monoassiale in trazione.

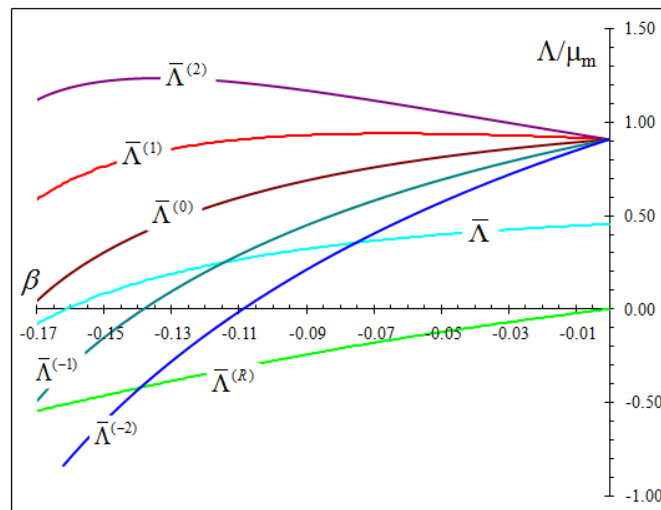


Figura 4.7b Analisi di stabilità per la microstruttura porosa (Gent) per il percorso di carico monoassiale in compressione.

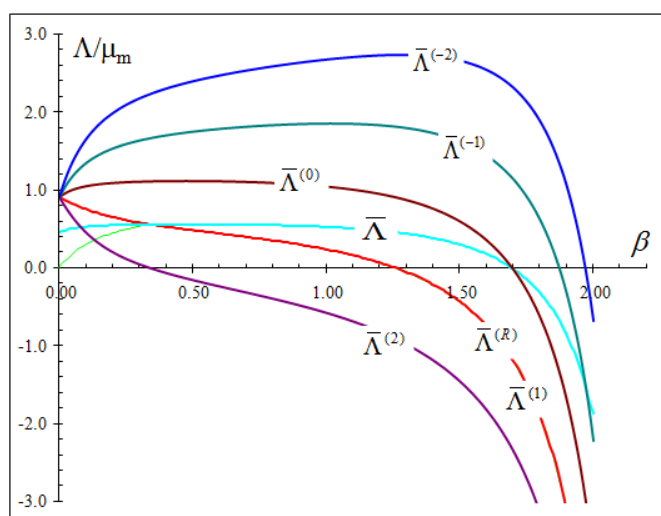


Figura 4.8a Analisi di stabilità per la microstruttura porosa (Gent) per il percorso di carico equibiassiale in trazione.

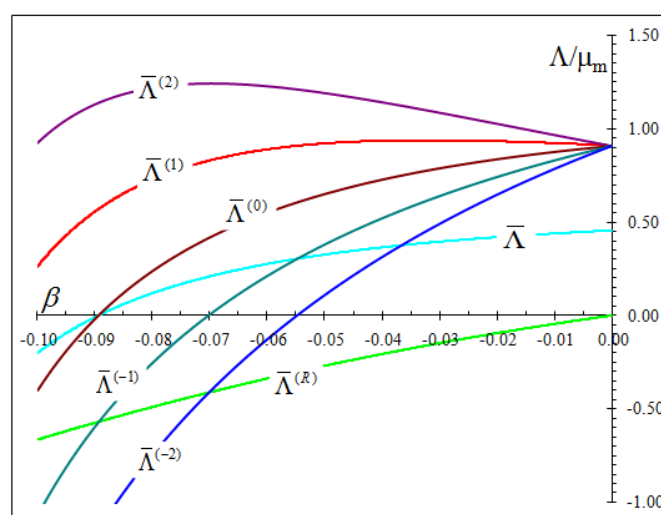


Figura 4.8b Analisi di stabilità per la microstruttura porosa (Gent) per il percorso di carico equibiassiale in compressione.

In merito alle misure coniugate di stabilità macroscopica, le analisi numeriche hanno messo in evidenza, per quanto riguarda il percorso di carico equibiassiale in trazione, che $\bar{\Lambda}^{(2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(1)}$ sono violati prima della perdita della forte ellitticità macroscopica.

Per il percorso di carico monoassiale la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ è violata prima della perdita della forte ellitticità. Inoltre le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$, $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(0)}$ per il percorso di carico monoassiale in trazione risultano sempre soddisfatte.

Per il percorso di carico equibiassiale in trazione, le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$ e $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ vengono violate dopo la perdita della forte ellitticità macroscopica.

Per quanto riguarda la compressione la perdita delle condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$ e $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ si ha prima della perdita della forte ellitticità macroscopica per entrambi i percorsi di carico. La perdita di stabilità relativa alla condizione $\bar{\Lambda}^{(0)}$, per il percorso di carico equibiassiale, coincide con la perdita dell'ellitticità forte macroscopica, sia in compressione che in trazione. La condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(0)}$, per il percorso di carico monoassiale in compressione, tende ad annullarsi dopo la perdita della forte ellitticità macroscopica, mentre in trazione non si annulla mai.

Nel range delle macrodeformazioni esaminato, le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(1)}$ non sono violate in compressione, sebbene l'analisi mette in evidenza un decremento con una tendenza ad annullarsi ad un livello di deformazione più grande.

Di seguito viene riportata la sequenza dell'innesco delle instabilità macroscopiche, per entrambi i percorsi di carico, associate alle misure coniugate di stabilità:

$$\text{Equibiassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+} < \beta_{cM}^{(0)+} = \beta_c^+ = \beta_{cM}^+ < \beta_{cM}^{(-1)+} < \beta_{cM}^{(-2)+},$$

$$\beta_{cM}^{(0)-} = \beta_{cM}^- < \beta_c^- < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-},$$

$$\text{Monoassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_c^+ = \beta_{cM}^+ < \beta_{cM}^{(1)+},$$

$$\beta_{cM}^- < \beta_c^- < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-},$$

Per la trazione, durante il percorso di carico monoassiale, si evidenzia pertanto che la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ fornisce una stima conservativa dell'instabilità microscopica, mentre per il percorso di carico equibiassiale sono le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(1)}$ che forniscono una stima conservativa dell'instabilità microscopica.

In compressione, per entrambi i percorsi di carico, sono le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$ e $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ che forniscono una stima conservativa dell'instabilità microscopica in

compressione. In Tabella 1 vengono riportati i valori critici per il parametro di carico associato alle diverse misure di stabilità. Per il percorso di carico equibiassiale la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(0)}$ fornisce una previsione esatta dell'instabilità microscopica, a meno di errori numerici dovuti alla discretizzazione del modello agli elementi finiti.

D'altra parte per il percorso di carico monoassiale in trazione la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(1)}$ fornisce una stima non conservativa sulla previsione del livello di carico per l'instabilità microscopica.

TRAZIONE	$\beta_{cM}^{(2)+}$	$\beta_{cM}^{(1)+}$	$\beta_{cM}^{(0)+}$	β_c^+	β_{cM}^+	$\beta_{cM}^{(-1)+}$	$\beta_{cM}^{(-2)+}$	$\beta_{cM}^{(R)+}$
Equibiassiale	0.345	1.255	1.695	1.695	1.695	1.875	1.965	1.255
Monoassiale	0.785	4.605	-	3.515	3.525	-	-	3.165
COMPRESSIONE	$\beta_{cM}^{(2)-}$	$\beta_{cM}^{(1)-}$	$\beta_{cM}^{(0)-}$	β_c^-	β_{cM}^-	$\beta_{cM}^{(-1)-}$	$\beta_{cM}^{(-2)-}$	$\beta_{cM}^{(R)-}$
Equibiassiale	-	-	-0.0894	-0.1435	-0.0894	-0.0703	-0.0550	0
Monoassiale	-	-	-	-0.0760	-0.1615	-0.1395	-0.1095	0

Tabella 1. Microstruttura porosa (Gent): valori critici del parametro di carico per le misure di stabilità macroscopiche e microscopiche.

Come ci si poteva aspettare, la misura di stabilità macroscopica (equazione 2.55) è violata a 0⁺ in compressione a causa degli effetti di instabilità rotazionali, e ancora prima la condizione macroscopica (equazione 2.48) in trazione. In particolare, si ha:

$$\beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(R)+} \leq \beta_{cM}^{(1)+} < \beta_{cM}^{(0)+} < \beta_{cM}^{(-1)+} < \beta_{cM}^{(-2)+}, \beta_{cM}^{(R)-} = 0$$

Da ciò segue che in trazione la misura di stabilità macroscopica (equazione 2.55) da una stima conservativa del parametro di carico critico microscopico. Questa situazione è sempre verificata quando il modo di instabilità è di natura globale. Inoltre, bisogna notare che per il percorso di carico equibiassiale la perdita della stabilità macroscopica in accordo alla relazione (equazione 2.55) ricorre con una deformazione incrementale simmetrica ($L=D$), coincidendo con la perdita della condizione macroscopica associata a $\bar{\Lambda}^{(1)}$.

In definitiva, l'effetto della porosità conduce ad un'influenza destabilizzante sia per l'analisi di stabilità macroscopica che microscopica, rispetto alla microstruttura omogenea. Pertanto, la condizione di ellitticità forte macroscopica può essere violata per dei valori sufficientemente alti del livello di deformazione, mentre si ricorda che contrariamente per la microstruttura omogenea il materiale risulta sempre fortemente ellittico. Per quanto riguarda le misure di stabilità macroscopiche coniugate la situazione è molto variegata, con effetti che possono cambiare da stabilizzante a destabilizzante in funzione della misura adottata.

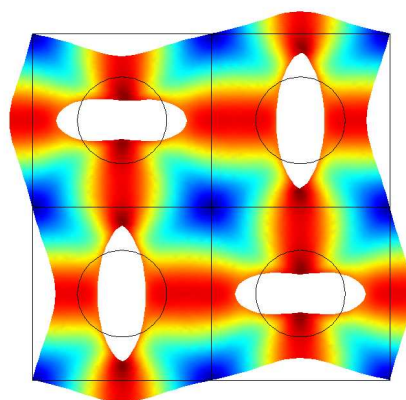


Figura 4.9a Modo instabilizzante per la microstruttura porosa (Gent) per il percorso di carico monoassiale in compressione.

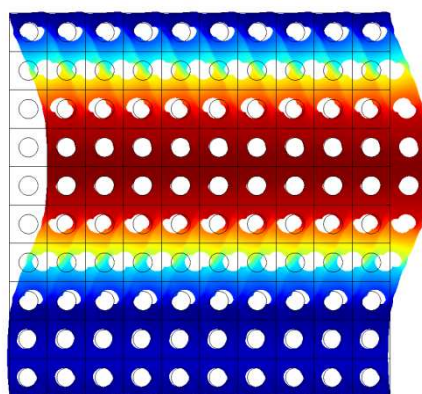


Figura 4.9b Modo instabilizzante per la microstruttura porosa (Gent) per il percorso di carico monoassiale in trazione.

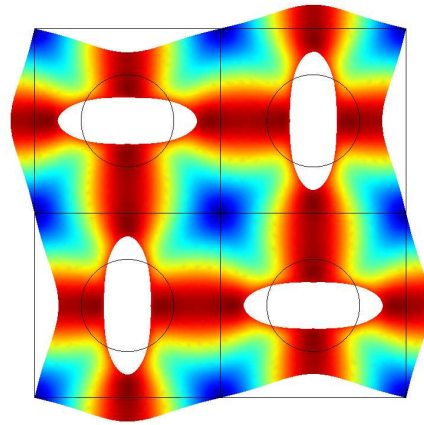


Figura 4.10a Modo instabilizzante per la microstruttura porosa (Gent) per il percorso di carico equibiassiale in compressione.

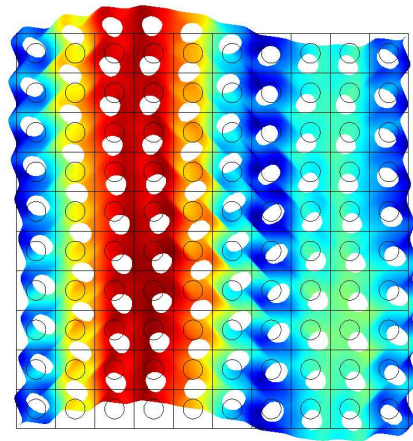


Figura 4.10b Modo instabilizzante per la microstruttura porosa (Gent) per il percorso di carico equibiassiale in trazione.

4.1.5 Microstruttura rinforzata-Gent

Il terzo caso che viene investigato è quello di una microstruttura che sia rappresentativa di un materiale composito che presenta un'inclusione circolare al suo interno, perfettamente incollata alla matrice, che può essere più o meno rigida. In particolare, in questo caso si prederanno in considerazione tre tipi di microstrutture che presentano un diverso rapporto μ_f/μ_m . Verranno pertanto analizzati i seguenti casi:

- Caso 1: $\mu_f/\mu_m=0.5$

- Caso 2: $\mu_f/\mu_m=10$
- Caso 3: $\mu_f/\mu_m=50$.

Il volume iniziale occupato dalla fibra è pari a $\pi/16$. Inoltre si indicheranno con k_m e μ_m rispettivamente il modulo volumetrico e tangenziale della matrice e con k_f e μ_f rispettivamente il modulo volumetrico e tangenziale della fibra.

La discretizzazione agli elementi finiti è stata effettuata con mesh triangolare ad elementi quadratici, costituita da 7598 elementi e 31194 gradi di libertà. Nella Figura 4.11 viene rappresentata la mesh adottata nelle analisi numeriche.

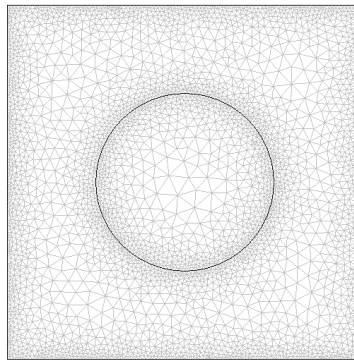


Figura 4.11 Mesh adottata per la microstruttura rinforzata.

1) Caso 1

Si analizza in questo primo caso una fibra molto più soffice rispetto alla matrice, con un rapporto tra i moduli tangenziali delle due fasi pari a 0.5. In particolare si adottano i seguenti valori:

$$\begin{aligned} k_m &= 8070 \cdot 10^6 \text{ Pa} & \mu_m &= 807 \cdot 10^6 \text{ Pa} \\ k_f &= 4035 \cdot 10^6 \text{ Pa} & \mu_f &= 403.5 \cdot 10^6 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Inoltre il rapporto tra il modulo volumetrico e quello tangenziale è stato imposto costante e risulta pari a 10. In Figura 4.12 viene plottata la risposta macroscopica in termini della componente normale del primo tensore di *Piola-Kirchhoff* \bar{T}_{R11} adimensionalizzata rispetto al modulo tangenziale della matrice μ_m rispetto al

parametro di carico β . La risposta evidenzia che il percorso di carico equibiassiale in trazione presenta la risposta più rigida. Tale risultato implica che l'inserimento di una fibra più soffice non incide sulla risposta della microstruttura, rendendola pertanto analoga alla risposta ricavata per la microstruttura porosa.

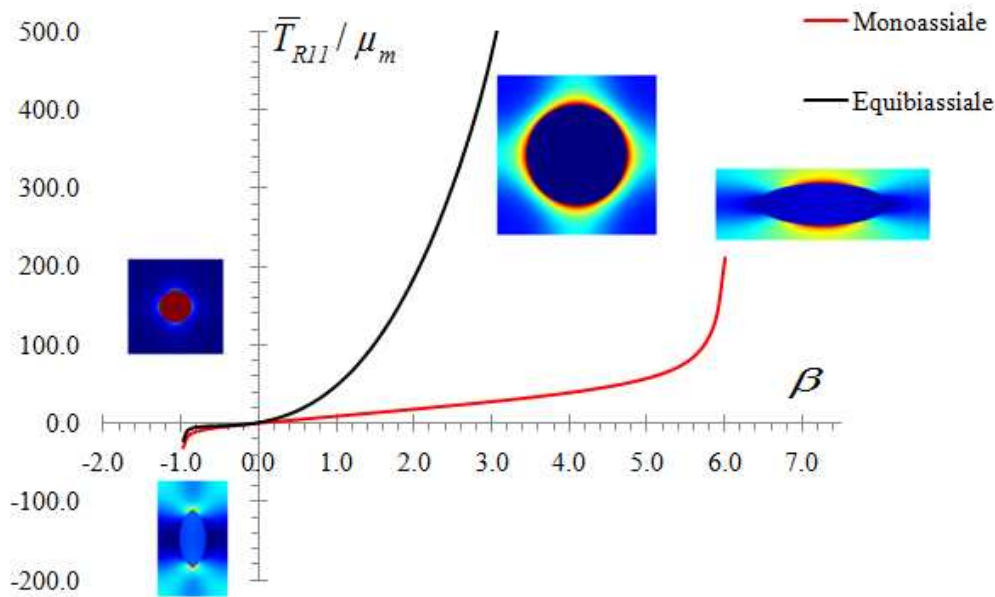


Figura 4.12 Risposta per la microstruttura rinforzata ($Gent-\mu_t/\mu_m=0.5$).

Nelle Figure 4.13-4.14 vengono presentate le analisi di stabilità per entrambi i percorsi di carico. Da tale analisi si può osservare che, per quanto riguarda la trazione per entrambi i percorsi di carico, la risposta è sempre stabile nel range delle deformazioni analizzato.

In compressione, si ha l'innescò dell'instabilità microscopica, per il percorso di carico monoassiale, per un valore del parametro di carico pari a $\beta_c^- = -0.825$. Contrariamente, per il percorso di carico equibiassiale la risposta è stabile. Inoltre in Figura 4.15 viene presentato uno dei due modi simultanei di instabilità che si hanno per il percorso di carico monoassiale in compressione.

In merito alla sequenza delle instabilità associate alle misure coniugate di deformazione, la perdita delle condizioni di stabilità associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$, $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(0)}$ per entrambi i percorsi di carico in compressione si hanno prima della perdita di ellitticità forte

macroscopica. Inoltre per entrambi i percorsi di carico in compressione le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(1)}$ e $\bar{\Lambda}^{(2)}$ non sono mai violate.

Le relazioni tra l'innescò delle instabilità macroscopiche in accordo alle misure coniugate di stabilità sono:

$$\text{Equibiassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+} ,$$

$$\beta_{cM}^{(0)-} < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-} ,$$

$$\text{Monoassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+} ,$$

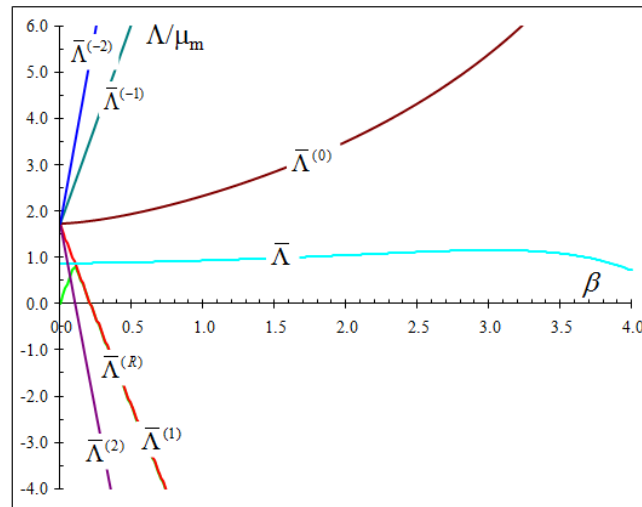
$$\beta_{cM}^{-} = \beta_c^{-} < \beta_{cM}^{(0)-} < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-} ,$$

le quali evidenziano che le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ $\bar{\Lambda}^{(1)}$ forniscono una stima conservativa dell'instabilità microscopica in trazione per entrambi i percorsi di carico per il percorso di carico equibiassiale, mentre le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$ e $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(0)}$ forniscono una stima conservativa in compressione.

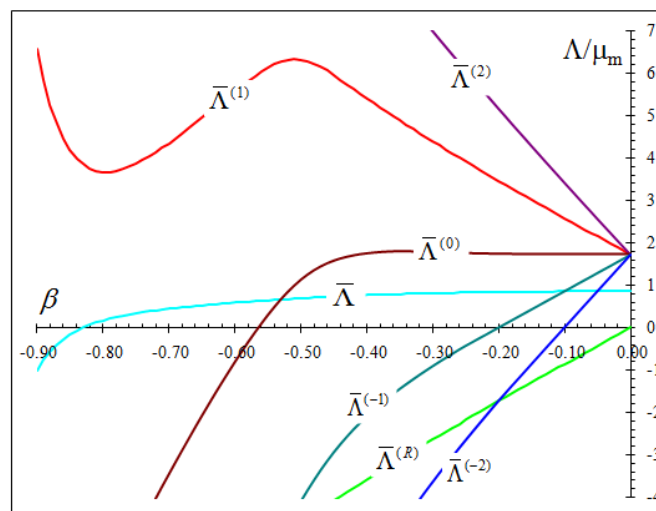
È importante anche notare che per il range di deformazioni esaminato, per il percorso di carico equibiassiale in trazione le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$, $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(0)}$ sempre prevedono la stabilità.

Per il percorso di carico monoassiale la differenza più importante rispetto a quello equibiassiale in compressione è che la microstruttura non è stabile, con una instabilità che è di tipo globale.

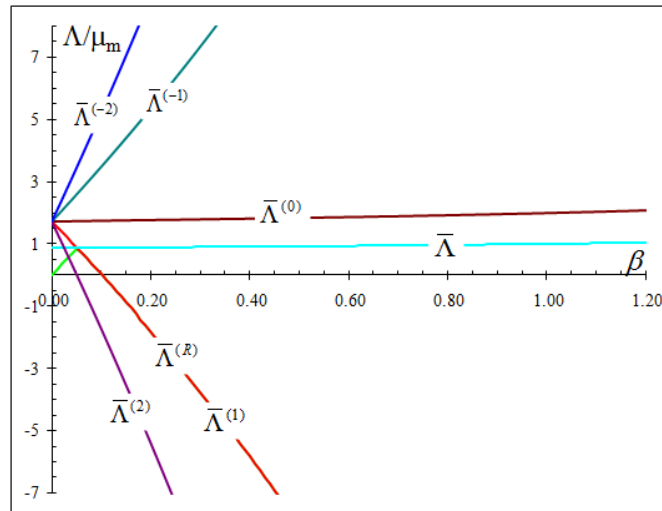
I valori del parametro di carico critico per le diverse misure di stabilità adottate, e con riferimento alla presente microstruttura analizzata, sono riportati in Tabella 2.



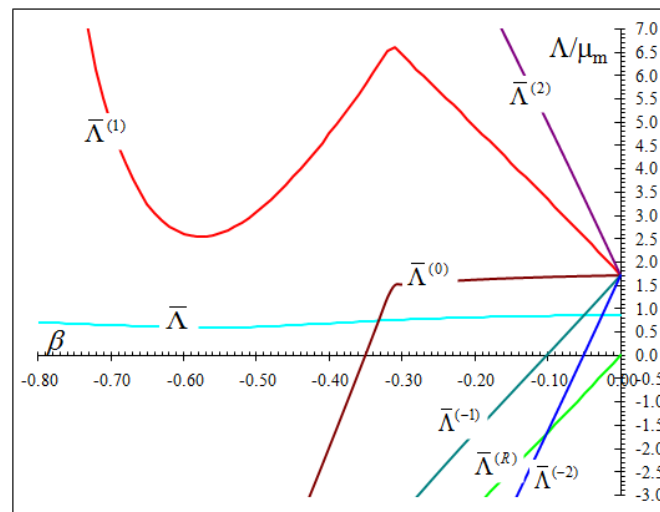
4.13a Analisi di stabilità per la microstruttura rinforzata ($\text{Gent-}\mu_t/\mu_m=0.5$) per il percorso di carico monoassiale in trazione.



4.13b Analisi di stabilità per la microstruttura rinforzata ($\text{Gent-}\mu_t/\mu_m=0.5$) per il percorso di carico monoassiale in compressione.



4.14a Analisi di stabilità per la microstruttura rinforzata ($\text{Gent-}\mu_r/\mu_m=0.5$) per il percorso di carico equibiassiale in trazione.



4.14b Analisi di stabilità per la microstruttura rinforzata ($\text{Gent-}\mu_r/\mu_m=0.5$) per il percorso di carico equibiassiale in compressione.

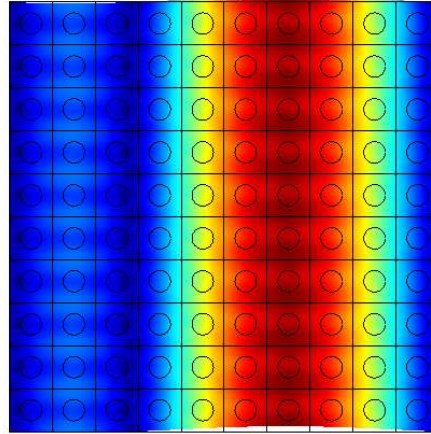


Figura 4.15 Modo in stabilizzante per la microstruttura rinforzata ($Gent-\mu_f/\mu_m=0.5$) per il percorso di carico monoassiale in compressione.

Trazione	$\beta_{cM}^{(2)+}$	$\beta_{cM}^{(1)+}$	$\beta_{cM}^{(0)+}$	β_c^+	β_{cM}^+	$\beta_{cM}^{(-1)+}$	$\beta_{cM}^{(-2)+}$	$\beta_{cM}^{(R)+}$
Equibiassiale	0.055	0.105	-	-	-	-	-	0.105
Monoassiale	0.105	0.215	-	-	-	-	-	0.215
Compressione	$\beta_{cM}^{(2)-}$	$\beta_{cM}^{(1)-}$	$\beta_{cM}^{(0)-}$	β_c^-	β_{cM}^-	$\beta_{cM}^{(-1)-}$	$\beta_{cM}^{(-2)-}$	$\beta_{cM}^{(R)-}$
Equibiassiale	-	-	-0.355	-	-	-0.105	-0.055	0
Monoassiale	-	-	-0.565	-0.825	-0.825	-0.205	-0.105	0

Tabella 2. Microstruttura rinforzata ($Gent-\mu_f/\mu_m=0.5$): valori critici del parametro di carico per le misure di stabilità macroscopiche e microscopiche.

2) Caso 2

Si prende ora in considerazione il caso in cui il rapporto tra i moduli tangenziali delle due fasi pari a 10. In particolare si adottano i seguenti valori:

$$\begin{aligned}
 k_m &= 8070 \cdot 10^6 \text{ Pa} & \mu_m &= 807 \cdot 10^6 \text{ Pa} \\
 k_f &= 80700 \cdot 10^6 \text{ Pa} & \mu_f &= 8070 \cdot 10^6 \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

In Figura 4.16 viene presentata la risposta macroscopica in termini della componente normale del primo tensore di *Piola-Kirchhoff* \bar{T}_{r11} adimensionalizzata rispetto al modulo tangenziale della matrice μ_m rispetto al parametro di carico β .

La risposta, per il percorso di carico equibiassiale in trazione, risulta molto più rigida rispetto al percorso di carico monoassiale. Contrariamente, in compressione, la risposta è analoga per entrambi i percorsi di carico.

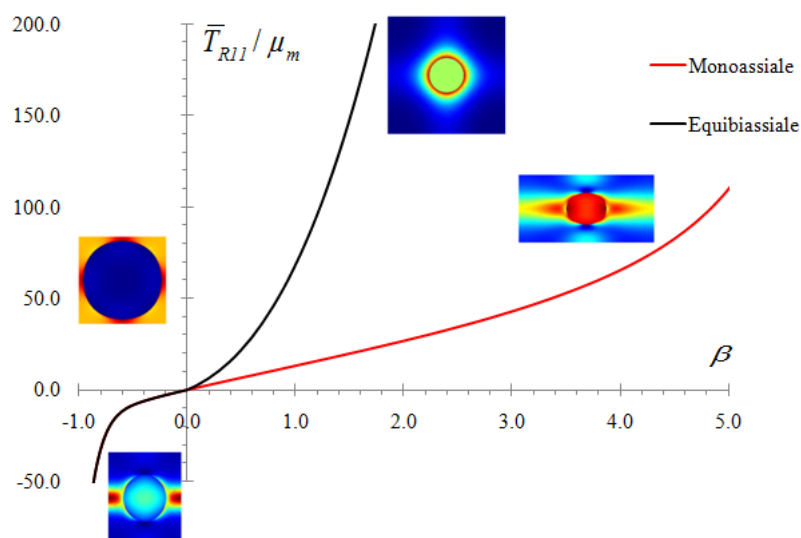


Figura 4.16 Risposta per la microstruttura rinforzata (Gent- $\mu_f/\mu_m=10$).

Le analisi di stabilità illustrate nelle Figure 4.17-4.18 evidenziano come in compressione l'innescò dell'instabilità microscopica si ha, per il percorso di carico equibiassiale, per un valore del parametro di carico pari a $\beta_c^- = -0.545$.

Per quanto riguarda il percorso di carico monoassiale, sempre in compressione, l'innescò dell'instabilità microscopica si ha per un valore del parametro di carico pari a $\beta_c^- = -0.475$. Inoltre nelle Figure 4.19 vengono plottati uno dei quattro modi simultanei di instabilità che si hanno sia per il percorso di carico equibiassiale in compressione che per il percorso di carico monoassiale in compressione.

Relativamente alla sequenza delle eventuali instabilità collegate alle misure coniugate di deformazione, in compressione per entrambi i percorsi di carico la perdita delle condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$ e $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ si hanno prima della perdita della forte ellitticità macroscopica.

La condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(0)}$, per il percorso di carico monoassiale tende ad annullarsi ad alti valori di deformazione. Contrariamente per il percorso di carico equibiassiale in

compressione, come per la microstruttura porosa, coincide con la perdita della forte ellitticità macroscopica.

Le relazioni tra l'innescò delle instabilità macroscopiche in accordo alle misure coniugate di stabilità sono:

$$\text{Equibiassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+} ,$$

$$\beta_{cM}^{(0)-} = \beta_{cM}^{-} = \beta_c^{-} < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-} ,$$

$$\text{Monoassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+} ,$$

$$\beta_{cM}^{-} = \beta_c^{-} < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-} ,$$

le quali evidenziano che le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ $\bar{\Lambda}^{(1)}$ forniscono una stima conservativa dell'instabilità microscopica in trazione mentre le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$ e $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ forniscono una stima conservativa in compressione.

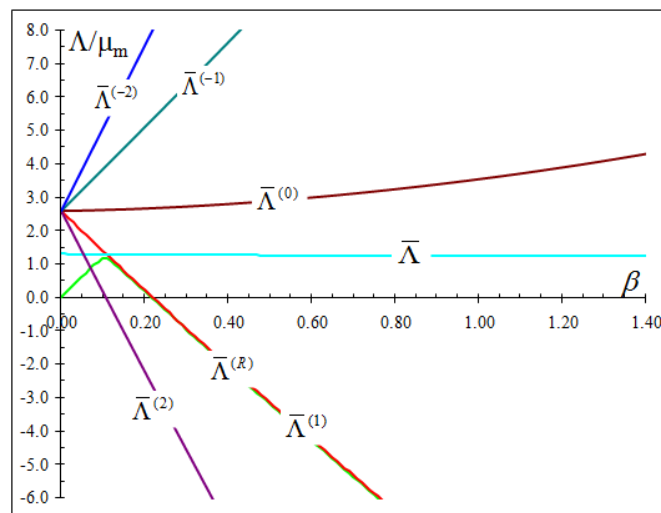
È importante anche notare che per il range di deformazioni esaminato, per entrambi i percorsi di carico in trazione, le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$, $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(0)}$ prevedono sempre la stabilità mentre per il percorso di carico equibiassiale in compressione le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ $\bar{\Lambda}^{(1)}$ sono sempre soddisfatte. Inoltre per il range di deformazioni analizzato, per il percorso di carico monoassiale in compressione, la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(0)}$ è anche soddisfatta.

Fra le misure di stabilità coniugate proposte, le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$ fornisce la stima meno conservativa in compressione, mentre la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(1)}$ fornisce la stima meno conservativa trazione. I valori del parametro di carico critico per le misure di stabilità misurate sono rappresentate in Tabella 3.

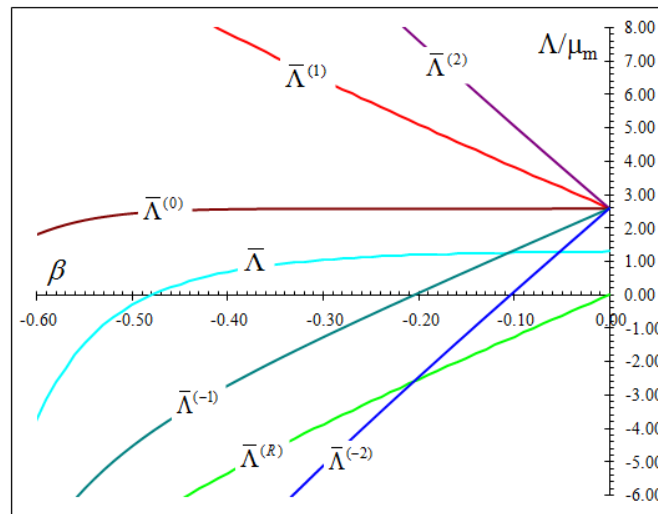
In definitiva, si può notare che sebbene a livello microscopico il materiale è sempre fortemente ellittico la condizione di forte ellitticità macroscopica può essere violata in compressione per alti valori della deformazioni. Pertanto si può concludere che la presenza di una inclusione più rigida rispetto alla matrice fornisce un effetto stabilizzante rispetto alla microstruttura porosa.

Trazione	$\beta_{cM}^{(2)+}$	$\beta_{cM}^{(1)+}$	$\beta_{cM}^{(0)+}$	β_c^+	β_{cM}^+	$\beta_{cM}^{(-1)+}$	$\beta_{cM}^{(-2)+}$	$\beta_{cM}^{(R)+}$
Equibiassiale	0.055	0.105	-	-	-	-	-	0.105
Monoassiale	0.105	0.215	-	-	-	-	-	0.215
Compressione	$\beta_{cM}^{(2)-}$	$\beta_{cM}^{(1)-}$	$\beta_{cM}^{(0)-}$	β_c^-	β_{cM}^-	$\beta_{cM}^{(-1)-}$	$\beta_{cM}^{(-2)-}$	$\beta_{cM}^{(R)-}$
Equibiassiale	-	-	-0.545	-0.545	-0.545	-0.105	-0.055	0
Monoassiale	-	-	-	-0.475	-0.475	-0.205	-0.105	0

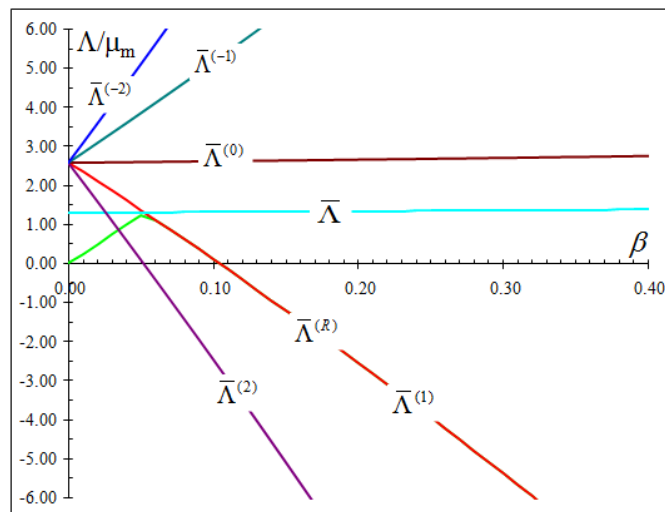
Tabella 3. Microstruttura rinforzata (Gent- $\mu_r/\mu_m=10$): valori critici del parametro di carico per le misure di stabilità macroscopiche e microscopiche.



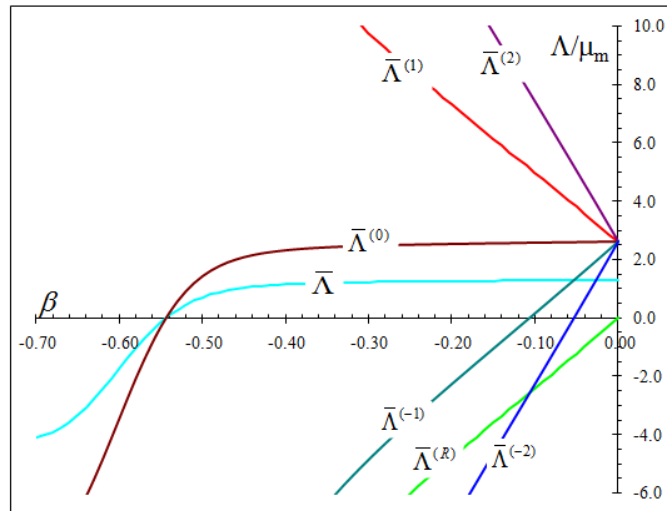
4.17a Analisi di stabilità per la microstruttura rinforzata (Gent- $\mu_r/\mu_m=10$) per il percorso di carico monoassiale in trazione.



4.17b Analisi di stabilità per la microstruttura rinforzata ($Gent\text{-}\mu_r/\mu_m=10$) per il percorso di carico monoassiale in compressione.



4.18a Analisi di stabilità per la microstruttura rinforzata ($Gent\text{-}\mu_r/\mu_m=10$) per il percorso di carico equibiassiale in trazione.



4.18b Analisi di stabilità per la microstruttura rinforzata ($Gent-\mu_r/\mu_m=10$) per il percorso di carico equibiassiale in compressione.

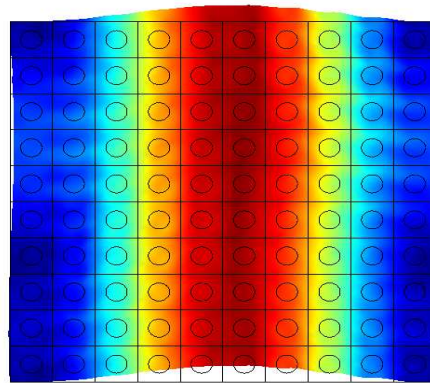


Figura 4.19a Modo in stabilizzante per la microstruttura rinforzata ($Gent-\mu_r/\mu_m=10$) per il percorso di carico equibiassiale in compressione.

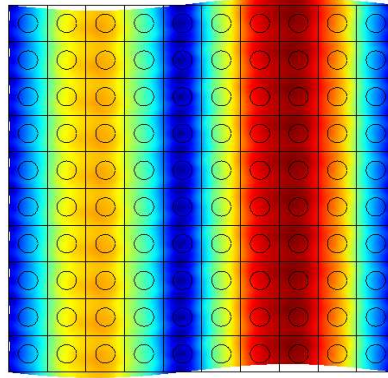


Figura 4.19b Modo in stabilizzante per la microstruttura rinforzata ($Gent-\mu_f/\mu_m=10$) per il percorso di carico monoassiale in compressione.

3) Caso 3

Si analizza in questo terzo caso una fibra molto più rigida rispetto alla matrice, con un rapporto tra i moduli tangenziali delle due fasi pari a 50. In particolare si adottano i seguenti valori:

$$\begin{aligned} k_m &= 8070 \cdot 10^6 \text{ Pa} & \mu_m &= 807 \cdot 10^6 \text{ Pa} \\ k_f &= 4035 \cdot 10^6 \text{ Pa} & \mu_f &= 403.5 \cdot 10^6 \text{ Pa} \end{aligned}$$

In Figura 4.20 viene presentata la risposta macroscopica in termini della componente normale del primo tensore di *Piola-Kirchhoff* \bar{T}_{R11} adimensionalizzata rispetto al modulo tangenziale della matrice μ_m rispetto al parametro di carico β .

La risposta evidenzia un irrigidimento sia in compressione che in trazione per entrambi i percorsi di carico.

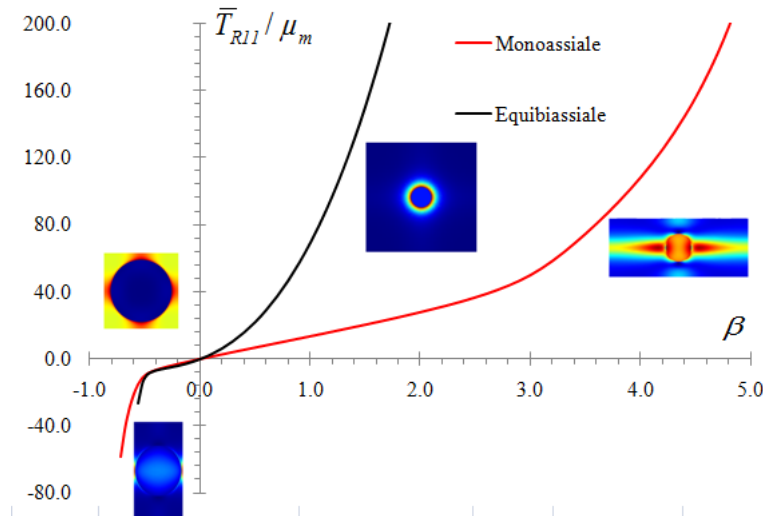


Figura 4.20 Risposta per la microstruttura rinforzata ($Gent-\mu_r/\mu_m=50$).

L'analisi di stabilità illustrata nelle Figure 4.21-4.22 evidenzia come in compressione l'innesco dell'instabilità microscopica si ha, per il percorso di carico equibiassiale per un valore del parametro di carico pari a $\beta_c^- = -0.475$, mentre per il percorso di carico monoassiale per un valore del parametro di carico pari a $\beta_c^- = -0.415$. Nelle Figure 4.23 vengono plottati uno dei quattro modi simultanei di instabilità che si hanno sia per il percorso di carico equibiassiale in compressione che per il percorso di carico monoassiale in compressione.

In merito alla sequenza delle eventuali instabilità collegate alle misure coniugate di deformazione, in compressione per entrambi i percorsi di carico la perdita delle condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$ e $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ si hanno prima della perdita della forte ellitticità macroscopica.

Come per la microstruttura porosa per il percorso di carico equibiassiale in compressione la perdita di stabilità associata a $\bar{\Lambda}^{(0)}$ coincide con la perdita della forte ellitticità macroscopica. Per quanto riguarda il percorso di carico monoassiale in compressione la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(0)}$ è violata dopo della perdita della forte ellitticità macroscopica, contrariamente in trazione non è mai violata.

Le relazioni tra l'innesco delle instabilità macroscopiche in accordo alle misure coniugate di stabilità sono:

Equibiassiale: $\beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+}$,

$$\beta_{cM}^{(1)-} < \beta_{cM}^{(0)-} = \beta_{cM}^{-} = \beta_c^{-} < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-} ,$$

Monoassiale: $\beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+}$,

$$\beta_{cM}^{(0)-} < \beta_{cM}^{-} = \beta_c^{-} < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-} ,$$

le quali evidenziano che le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ $\bar{\Lambda}^{(1)}$ forniscono una stima conservativa dell'instabilità microscopica in trazione mentre le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$ e $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ forniscono una stima conservativa in compressione.

È importante anche notare che per il range di deformazioni esaminato, per il percorso di carico equibiassiale in trazione le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$, $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(0)}$ sempre prevedono la stabilità mentre per il percorso di carico equibiassiale in compressione la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ è sempre soddisfatta.

Per il percorso di carico monoassiale le differenze rispetto a quello equibiassiale si hanno in compressione in quanto la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(0)}$ è violata dopo la perdita della forte ellitticità macroscopica, contrariamente per il percorso di carico equibiassiale si ha coincidenza. Inoltre la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(1)}$ è violata per il percorso di carico equibiassiale in compressione mentre per quello monoassiale risulta stabile.

Fra le misure di stabilità coniugate proposte, la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(1)}$ fornisce la stima meno conservativa in compressione, mentre la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$ fornisce la stima meno conservativa trazione.

I valori del parametro di carico critico per le misure di stabilità misurate sono rappresentate in Tabella 4.

In definitiva, si può notare che sebbene a livello microscopico il materiale sia sempre fortemente ellittico la condizione di forte ellitticità macroscopica può essere violata in compressione per alti valori della deformazioni. Pertanto si può concludere che la presenza di una inclusione rigida fornisce un effetto stabilizzante rispetto alla microstruttura porosa.

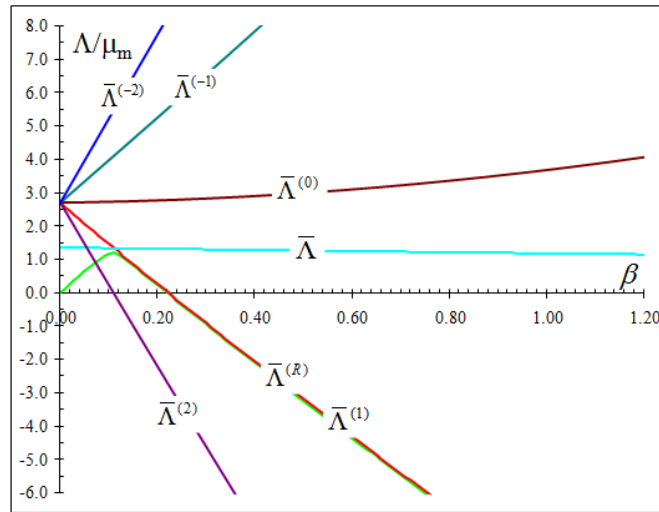


Figura 4.21a Analisi di stabilità per la microstruttura rinforzata ($\text{Gent-}\mu_t/\mu_m=50$) per il percorso di carico monoassiale in trazione.

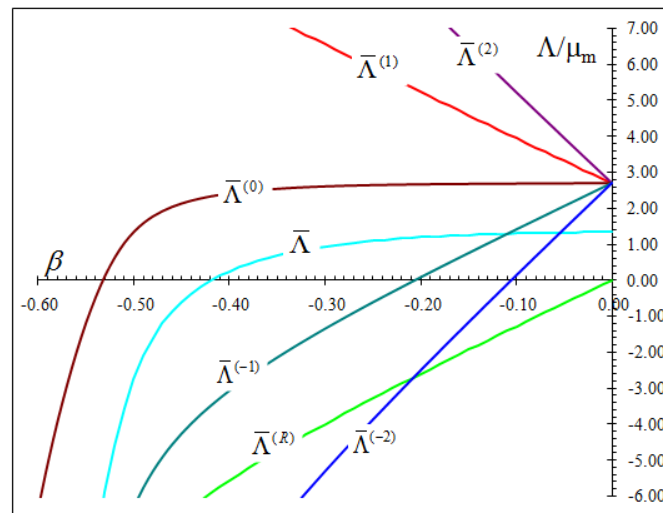


Figura 4.21b Analisi di stabilità per la microstruttura rinforzata ($\text{Gent-}\mu_t/\mu_m=50$) per il percorso di carico monoassiale in compressione.

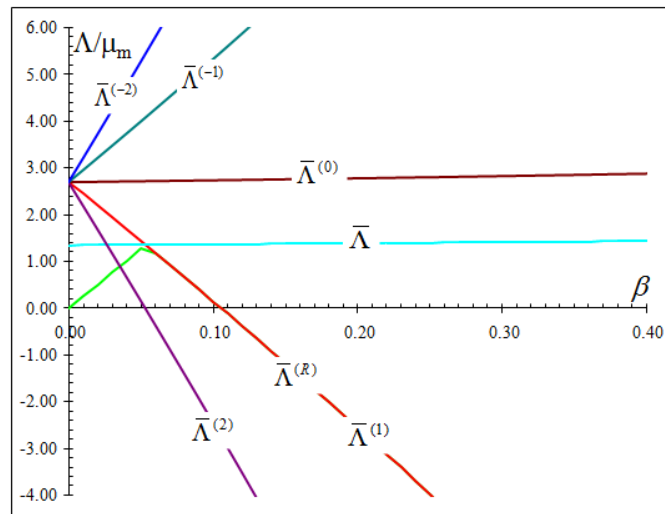


Figura 4.22a Analisi di stabilità per la microstruttura rinforzata ($\text{Gent-}\mu_r/\mu_m=50$) per il percorso di carico equibiassiale in trazione.

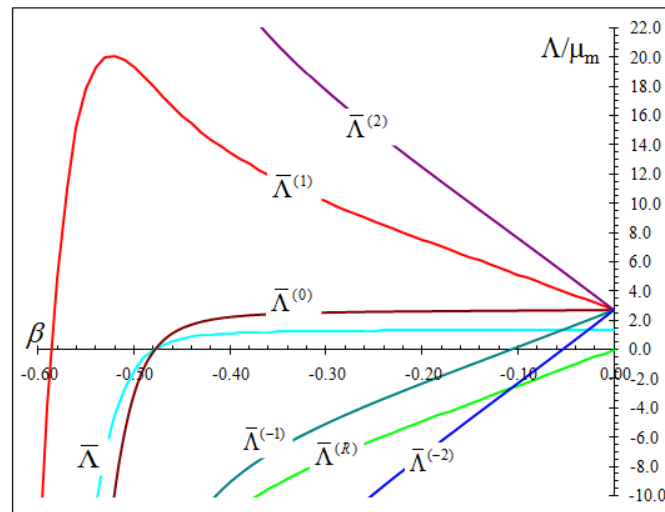


Figura 4.22b Analisi di stabilità per la microstruttura rinforzata ($\text{Gent-}\mu_r/\mu_m=50$) per il percorso di carico equibiassiale in compressione.

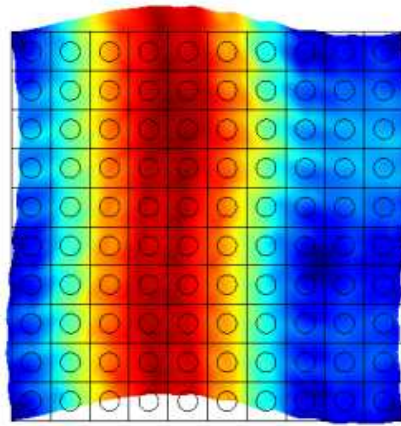


Figura 4.23a Modo instabilizzante per la microstruttura rinforzata (Gent- $\mu_f/\mu_m=50$) per il percorso di carico equibiassiale in trazione.

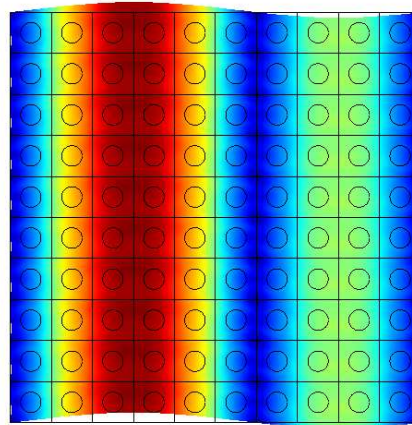


Figura 4.23b Modo instabilizzante per la microstruttura rinforzata (Gent- $\mu_f/\mu_m=50$) per il percorso di carico monoassiale in trazione.

Trazione	$\beta_{cM}^{(2)+}$	$\beta_{cM}^{(1)+}$	$\beta_{cM}^{(0)+}$	β_c^+	β_{cM}^+	$\beta_{cM}^{(-1)+}$	$\beta_{cM}^{(-2)+}$	$\beta_{cM}^{(R)+}$
Equibiassiale	0.055	0.105	-	-	-	-	-	0.105
Monoassiale	0.105	0.225	-	-	-	-	-	0.225
Compressione	$\beta_{cM}^{(2)-}$	$\beta_{cM}^{(1)-}$	$\beta_{cM}^{(0)-}$	β_c^-	β_{cM}^-	$\beta_{cM}^{(-1)-}$	$\beta_{cM}^{(-2)-}$	$\beta_{cM}^{(R)-}$
Equibiassiale	-	-	-0.475	-0.475	-0.475	-0.105	-0.055	0
Monoassiale	-	-	-0.535	-0.415	-0.415	-0.205	-0.105	0

Tabella 4 Microstruttura rinforzata (Gent- $\mu_f/\mu_m=50$): valori critici del parametro di carico per le misure di stabilità macroscopiche e microscopiche.

4.1.6 Microstruttura porosa e rinforzata –Neo Hookean

Nella presente sezione vengono riportati i risultati numerici con riferimento alla densità di energia di deformazione tipo Neo-Hookeana. Le analisi numeriche fanno riferimento alle medesime microstrutture già analizzate per la densità di energia di deformazione tipo Gent, pertanto in questa fase per brevità sono riportare solo in forma tabellare i valori dei parametri di carico critico connesse alle diverse misure di stabilità analizzate. Per quanto riguarda la microstruttura porosa vengono presentati in Tabella 5 i valori del parametro di carico critico, con riferimento alle analisi di stabilità macroscopica e microscopica per entrambi i percorsi di carico. Inoltre nelle figure 24-25 vengono presentati i modi di instabilità microscopici per entrambi i percorsi di carico. Le analisi hanno messo in evidenza che, fatta eccezione per il percorso di carico monoassiale in trazione, in cui il modo di instabilità è di natura globale, per gli altri percorsi di carico l'instabilità microscopica precede sempre quella macroscopica.

Trazione	$\beta_{cM}^{(2)+}$	$\beta_{cM}^{(1)+}$	$\beta_{cM}^{(0)+}$	β_c^+	β_{cM}^+	$\beta_{cM}^{(-1)+}$	$\beta_{cM}^{(-2)+}$	$\beta_{cM}^{(R)+}$
Equibiassiale	0.330	1.430	1.96	1.58	1.97	2.17	2.31	1.430
Monoassiale	0.795	-	-	4.875	4.875	-	-	4.245
Compressione	$\beta_{cM}^{(2)-}$	$\beta_{cM}^{(1)-}$	$\beta_{cM}^{(0)-}$	β_c^-	β_{cM}^-	$\beta_{cM}^{(-1)-}$	$\beta_{cM}^{(-2)-}$	$\beta_{cM}^{(R)-}$
Equibiassiale	-0.117	-0.1055	-0.0895	-0.0759	-0.0895	-0.0705	-0.0545	0
Monoassiale	-	-	-	-0.143	-0.162	-0.1385	-0.1085	0

Tabella 5 Microstruttura porosa (Neo-Hookean): valori critici del parametro di carico per le misure di stabilità macroscopiche e microscopiche.

Le relazioni tra l'innescò delle instabilità macroscopiche in accordo alle misure coniugate di stabilità sono:

$$\text{Equibiassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+} < \beta_{cM}^{(0)+} = \beta_c^+ = \beta_{cM}^+ < \beta_{cM}^{(-1)+} < \beta_{cM}^{(-2)+}$$

$$\beta_{cM}^{(2)-} < \beta_{cM}^{(1)-} < \beta_{cM}^{(0)-} = \beta_{cM}^- < \beta_c^- < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-}$$

$$\text{Monoassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(R)+} < \beta_c^+ = \beta_{cM}^+$$

$$\beta_{cM}^- < \beta_c^- < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-}.$$

Le misure associate a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(1)}$ forniscono una stima conservativa del carico primario di instabilità microscopico in trazione per il percorso di carico equibiassiale, mentre la misura associata a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ fornisce una stima conservativa per il percorso di carico monoassiale in trazione. Per quanto riguarda la compressione le misure associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$ e $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ forniscono una stima conservativa del carico primario di instabilità microscopico.

La perdita di stabilità relativa alla condizione $\bar{\Lambda}^{(0)}$, per il percorso di carico equibiassiale sia in trazione che in compressione, coincide con la perdita dell'ellitticità forte macroscopica. Per il percorso di carico monoassiale in trazione le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(0)}, \bar{\Lambda}^{(-1)}, \bar{\Lambda}^{(-2)}$ non sono mai violate per il livello di deformazione analizzato. Per il percorso di carico monoassiale in compressione le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(0)}, \bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}$ non sono mai violate per il livello di deformazione analizzato.

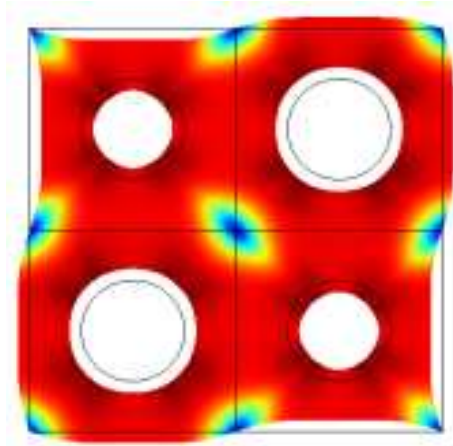


Figura 4.24a Modo instabilizzante per la microstruttura porosa (Neo-Hookean) per il percorso di carico equibiassiale in trazione.

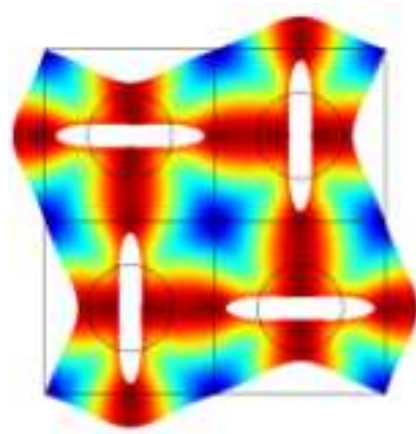


Figura 4.24b Modo instabilizzante per la microstruttura porosa (Neo-Hookean) per il percorso di carico equibiassiale in compressione.

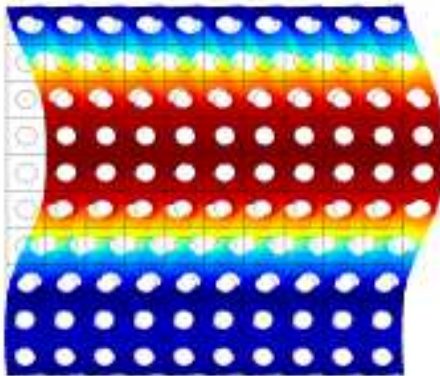


Figura 4.25a Modo instabilizzante per la microstruttura porosa (Neo-Hookean) per il percorso di carico monoassiale in trazione.

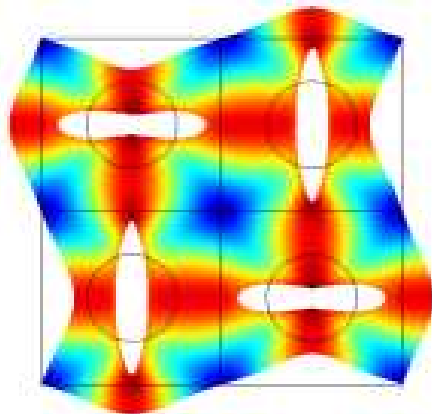


Figura 4.25b Modo instabilizzante per la microstruttura porosa (Neo-Hookean) per il percorso di carico monoassiale in compressione.

Riguardo la microstruttura rinforzata sono stati analizzati gli stessi casi visti con riferimento alla densità di energia di deformazione tipo Gent.

1) Caso 1

In questo primo caso si analizza la microstruttura rinforzata con un rapporto tra i moduli tangenziali delle due fasi pari a 0.5.

Nella Tabella 6, sono presentati i valori del parametro di carico critico per le diverse misure di stabilità.

Per entrambi i percorsi di carico in trazione la microstruttura risulta sempre stabile. Per il percorso di carico equibiassiale in compressione la microstruttura risulta stabile, mentre per il percorso di carico monoassiale è instabile, con un modo di instabilità di tipo globale ed in figura 4.26 viene rappresentato uno dei due modi simultanei di instabilità.

Trazione	$\beta_{cM}^{(2)+}$	$\beta_{cM}^{(1)+}$	$\beta_{cM}^{(0)+}$	β_c^+	β_{cM}^+	$\beta_{cM}^{(-1)+}$	$\beta_{cM}^{(-2)+}$	$\beta_{cM}^{(R)+}$
Equibiassiale	0.055	0.105	-	-	-	-	-	0.105
Monoassiale	0.105	0.215	-	-	-	-	-	0.215
Compressione	$\beta_{cM}^{(2)-}$	$\beta_{cM}^{(1)-}$	$\beta_{cM}^{(0)-}$	β_c^-	β_{cM}^-	$\beta_{cM}^{(-1)-}$	$\beta_{cM}^{(-2)-}$	$\beta_{cM}^{(R)-}$
Equibiassiale	-	-	-0.355	-	-	-0.105	-0.055	0
Monoassiale	-	-	-0.565	-0.835	-0.835	-0.205	-0.105	0

Tabella 6 Microstruttura rinforzata (Neo- Hookean- $\mu_f/\mu_m=0.5$): valori critici del parametro di carico per le misure di stabilità macroscopiche e microscopiche.

Di seguito vengono riportate le relazioni tra l'innescò delle instabilità macroscopiche in accordo alle misure coniugate di stabilità:

$$\text{Equibiassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+}$$

$$\beta_{cM}^{(0)-} < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-}$$

$$\text{Monoassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+}$$

$$\beta_{cM}^- = \beta_c^- < \beta_{cM}^{(0)-} < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-}.$$

Le relazioni mettono in evidenza che le misure associate a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(1)}$ forniscono una stima conservativa del carico primario di instabilità microscopico in trazione per entrambi i percorsi di carico.

Per quanto riguarda la compressione per entrambi i percorsi di carico le misure associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$, $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(0)}$ forniscono una stima conservativa del carico primario di instabilità microscopico.

Le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(0)}$, $\bar{\Lambda}^{(-1)}$, $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ non sono mai violate in trazione per entrambi i percorsi di carico.

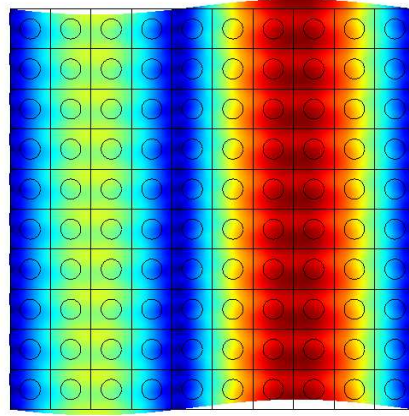


Figura 4.26 Modo instabilizzante per la microstruttura rinforzata (Neo-Hookean- $\mu_f/\mu_m=0.5$) per il percorso di carico equibiassiale in compressione.

2) Caso 2

In questo secondo caso si analizza la microstruttura rinforzata con un rapporto $\mu_f/\mu_m=10$.

Nella Tabella 7, vengono presentati i valori del parametro di carico critico per le diverse misure di stabilità. Per entrambi i percorsi di carico in trazione la microstruttura risulta sempre stabile. Contrariamente in compressione la microstruttura risulta instabile con un modo di instabilità che è di natura globale, ed in particolare i modi di instabilità microscopici in compressione sono rappresentati nelle figure 4.27 (4 modi simultanei

per il percorso di carico equibiassiale e due modi simultanei per il percorso di carico monoassiale).

Trazione	$\beta_{cM}^{(2)+}$	$\beta_{cM}^{(1)+}$	$\beta_{cM}^{(0)+}$	β_c^+	β_{cM}^+	$\beta_{cM}^{(-1)+}$	$\beta_{cM}^{(-2)+}$	$\beta_{cM}^{(R)+}$
Equibiassiale	0.055	0.105	-	-	-	-	-	0.105
Monoassiale	0.105	0.215	-	-	-	-	-	0.215
Compressione	$\beta_{cM}^{(2)-}$	$\beta_{cM}^{(1)-}$	$\beta_{cM}^{(0)-}$	β_c^-	β_{cM}^-	$\beta_{cM}^{(-1)-}$	$\beta_{cM}^{(-2)-}$	$\beta_{cM}^{(R)-}$
Equibiassiale	-	-	-0.545	-0.545	-0.545	-0.105	-0.055	0
Monoassiale	-	-	-0.705	-0.485	-0.485	-0.205	-0.105	0

Tabella 7 Microstruttura rinforzata (Neo-Hookean- $\mu_r/\mu_m=10$): valori critici del parametro di carico per le misure di stabilità macroscopiche e microscopiche.

Di seguito vengono riportate le relazioni tra l'innescò delle instabilità macroscopiche in accordo alle misure coniugate di stabilità:

$$\text{Equibiassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+}$$

$$\beta_{cM}^{(0)-} = \beta_{cM}^- = \beta_c^- < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-}$$

$$\text{Monoassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+}$$

$$\beta_{cM}^{(0)-} < \beta_{cM}^- = \beta_c^- < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-}$$

Le relazioni mettono in evidenza che le misure associate a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(1)}$ forniscono una stima conservativa del carico primario di instabilità microscopico in trazione per entrambi i percorsi di carico.

Per quanto riguarda la compressione per entrambi i percorsi di carico le misure associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$, $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ forniscono una stima conservativa del carico primario di instabilità microscopico.

Le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(0)}$, $\bar{\Lambda}^{(-1)}$, $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ non sono mai violate in trazione per entrambi i percorsi di carico, mentre in compressione le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(1)}$, $\bar{\Lambda}^{(2)}$ non sono mai violate. la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(0)}$, per il percorso di carico equibiassiale in

compressione, coincide con la perdita di ellitticità forte macroscopica, mentre per il percorso di carico monoassiale si annulla dopo la perdita dell'ellitticità forte macroscopica.

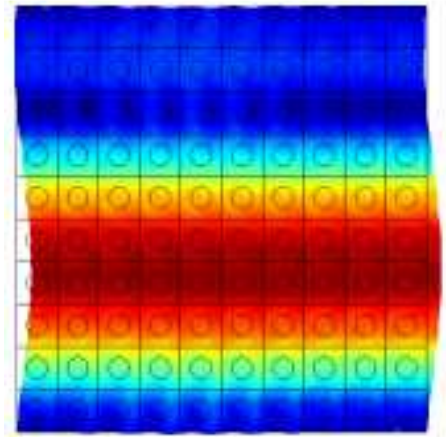


Figura 4.27a Modo instabilizzante per la microstruttura rinforzata (Neo-Hookean- $\mu_f/\mu_m=10$) per il percorso di carico equibiassiale in compressione.

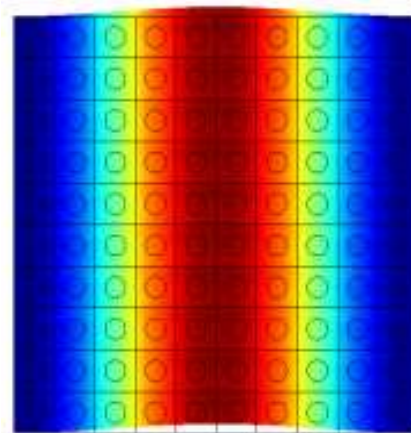


Figura 4.27b Modo instabilizzante per la microstruttura rinforzata (Neo-Hookean- $\mu_f/\mu_m=10$) per il percorso di carico monoassiale in compressione.

3) Caso 3

In questo terzo caso si analizza la microstruttura rinforzata, con una fibra molto più rigida rispetto alla matrice ($\mu_f/\mu_m=50$).

Nella Tabella 8, vengono presentati i valori del parametro di carico critico per le diverse misure di stabilità. In particolare per entrambi i percorsi di carico in trazione la microstruttura risulta sempre stabile. Contrariamente per entrambi i percorsi di carico in compressione la microstruttura risulta instabile con un modo di instabilità che è sdi natura globale. I modi di instabilità microscopici in compressione sono rappresentati nelle figure 4.28 (4 modi simultanei per il percorso di carico equibiassiale e due modi simultanei per il percorso di carico monoassiale).

Trazione	$\beta_{cM}^{(2)+}$	$\beta_{cM}^{(1)+}$	$\beta_{cM}^{(0)+}$	β_c^+	β_{cM}^+	$\beta_{cM}^{(-1)+}$	$\beta_{cM}^{(-2)+}$	$\beta_{cM}^{(R)+}$
Equibiassiale	0.055	0.105	-	-	-	-	-	0.105
Monoassiale	0.105	0.215	-	-	-	-	-	0.215
Compressione	$\beta_{cM}^{(2)-}$	$\beta_{cM}^{(1)-}$	$\beta_{cM}^{(0)-}$	β_c^-	β_{cM}^-	$\beta_{cM}^{(-1)-}$	$\beta_{cM}^{(-2)-}$	$\beta_{cM}^{(R)-}$
Equibiassiale	-	-0.605	-0.485	-0.485	-0.485	-0.105	-0.055	0
Monoassiale	-	-	-0.705	-0.485	-0.485	-0.205	-0.105	0

Tabella 8 Microstruttura rinforzata (Neo-Hookean- $\mu_r/\mu_m=50$): valori critici del parametro di carico per le misure di stabilità macroscopiche e microscopiche.

Di seguito vengono riportate le relazioni tra l'innescò delle instabilità macroscopiche in accordo alle misure coniugate di stabilità:

$$\text{Equibiassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+}$$

$$\beta_{cM}^{(1)-} < \beta_{cM}^{(0)-} = \beta_{cM}^- = \beta_c^- < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-}$$

$$\text{Monoassiale: } \beta_{cM}^{(2)+} < \beta_{cM}^{(1)+}$$

$$\beta_{cM}^{(0)-} < \beta_{cM}^- = \beta_c^- < \beta_{cM}^{(-1)-} < \beta_{cM}^{(-2)-}$$

Le relazioni mettono in evidenza che le misure associate a $\bar{\Lambda}^{(2)}$ e $\bar{\Lambda}^{(1)}$ forniscono una stima conservativa del carico primario di instabilità microscopico in trazione per entrambi i percorsi di carico.

Per quanto riguarda la compressione per entrambi i percorsi di carico le misure associate a $\bar{\Lambda}^{(-1)}$, $\bar{\Lambda}^{(-2)}$ forniscono una stima conservativa del carico primario di instabilità

microscopico. Le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(0)}, \bar{\Lambda}^{(-1)}, \bar{\Lambda}^{(-2)}$ non sono mai violate in trazione per entrambi i percorsi di carico, mentre in compressione le condizioni associate a $\bar{\Lambda}^{(1)}, \bar{\Lambda}^{(2)}$ non sono mai violate. la condizione associata a $\bar{\Lambda}^{(0)}$, per il percorso di carico equibiassiale in compressione, coincide con la perdita di ellitticità forte macroscopica, mentre per il percorso di carico monoassiale si annulla dopo la perdita dell'ellitticità forte macroscopica.

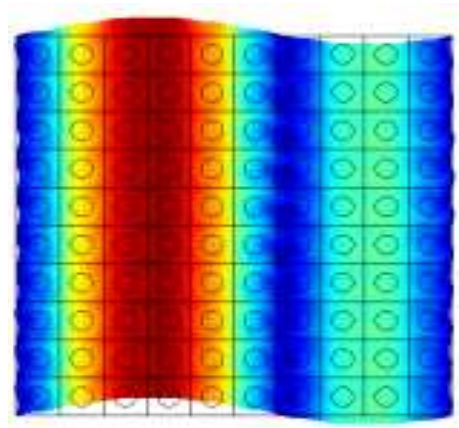


Figura 4.28a Modo instabilizzante per la microstruttura rinforzata (Neo-Hookean- $\mu_f/\mu_m=50$) per il percorso di carico equibiassiale in compressione.

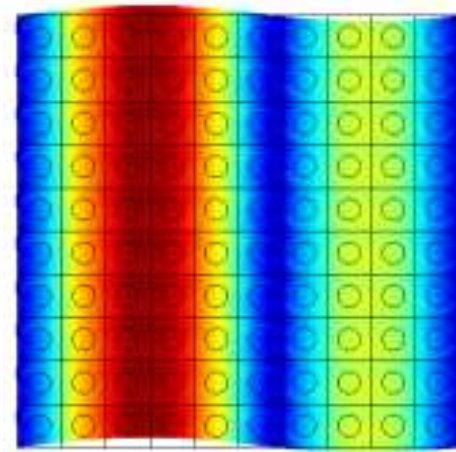


Figura 4.28b Modo instabilizzante per la microstruttura rinforzata (Neo-Hookean- $\mu_f/\mu_m=50$) per il percorso di carico monoassiale in compressione.

4.2 Confronto tra analisi diretta e analisi omogeneizzata

Al fine di validare il modello micro-meccanico proposto nel terzo capitolo, le proprietà macroscopiche ottenute per una configurazione danneggiata fissata sono state applicate per lo studio di una struttura composita 2D, costituita da un arrangiamento regolare di celle unitarie, soggetta a condizioni al contorno che producono gradienti non uniformi di tensioni e di deformazioni.

Sono stati considerati due tipi di problemi: il primo caratterizzato dall'assenza di contatto tra le superfici delle microfratture delle singole celle e il secondo caratterizzato dalla presenza di contatto.

In particolare il confronto è stato effettuato in termini di energia di rilascio tra l'analisi diretta, intendendo quella costituita esplicitamente dalla microstruttura composita, la quale è costituita da un arrangiamento regolare di 5x5 celle unitarie, e quella costituita dall'analisi microscopica del singolo RVE, nel quale si impongono le macro-deformazioni ottenute dall'analisi macroscopica del macro elemento omogeneizzato.

Per ricavare i valori dell'energia di rilascio ad ogni tip delle microfratture nell'analisi omogeneizzata è stata proposta una procedura computazionale. Tale procedura risulta molto semplice in assenza di contatto tra le superfici delle microfratture, contrariamente in presenza di contatto la procedura risulta molto complessa, in quanto bisogna prendere in considerazione la dipendenza dalla direzione della macro-deformazione, la quale può variare da cella a cella.

La procedura iterativa realizzata segue i seguenti steps:

- 1) *Valutazione* dei moduli macroscopici omogeneizzati utilizzando il singolo RVE soggetto alle tre condizioni al contorno (equazione 3.10);
- 2) *Analisi* della struttura composita omogenea utilizzando i moduli omogeneizzati ricavati nello step precedente;
- 3) *Calcolo* delle macro-deformazioni (equazione 3.4) utilizzando gli spostamenti ottenuti dallo step precedente ed eseguendo l'integrazione con riferimento al contorno esterno di tutta la struttura composita; in questo modo si stima la

- direzione di macro-deformazione mediata sulla cella unitaria la quale viene utilizzata per calcolare i moduli omogeneizzati;
- 4) *Determinazione* della configurazione di contatto in una cella unitaria utilizzando le macro-deformazioni determinate dallo step precedente; in particolare la macro-deformazione valutata nello step precedente è adottata per guidare la cella unitaria in accordo alle tre condizioni al contorno (equazione 3.10) e prendendo in considerazione il contatto tra le superfici delle microfratture;
 - 5) *Valutazione* dei moduli omogeneizzati aggiornati considerando la configurazione di contatto determinata nello step precedente; in particolare i moduli omogeneizzati aggiornati sono valutati con riferimento alla configurazione iniziale imponendo le condizioni di vincolo per gli spostamenti relativi nella direzione normale all'interfaccia, $[[u_n]] = 0$, lungo la precedente configurazione di contatto;
 - 6) *Ripetizione* degli step da 2 a 5 fino a convergenza; la convergenza viene misurata in termini di differenza tra la configurazione di contatto ottenuta nella configurazione attuale e quella dello step precedente. In particolare la convergenza è misurata in termini di errore percentuale relativo $(A_i - A_{i-1})/A_{i-1}$ tra l'area di contatto dello step attuale e l'area di contatto dello step precedente. La tolleranza per tale errore è stata fissata pari a 10^{-5} ;
 - 7) *Analisi finale* della struttura composita omogeneizzata, adottando i moduli omogeneizzati ottenuti nello step precedente;
 - 8) *Calcolo* dell'energia di rilascio in entrambi i tip delle microfratture per ogni cella unitaria, e per le tre condizioni al contorno, utilizzando la tecnica di omogeneizzazione proposta e imponendo la macro-deformazione ottenuta nello step precedente;

Quando non si è in presenza di contatto tra le superfici delle microfratture gli step che vanno da 3 a 7 devono essere omessi. La precedente procedura deve essere ripetuta per ogni condizione al contorno. Nell'analisi diretta, l'energia di rilascio ad ogni tip delle microfratture, viene valutata come post-processing dell'analisi agli elementi finiti utilizzando la tecnica dell'integrale J .

Per poter ricavare le proprietà omogeneizzate della microstruttura porosa, attraverso il modello micro-meccanico proposto, ed inoltre per poter effettuare il confronto con l'analisi diretta attraverso la procedura precedentemente descritta, è stato utilizzato un modello agli elementi finiti tramite un approccio agli spostamenti.

Tale modello è stato sviluppato mediante il codice commerciale COMSOL MULTIPHISICSTM [Comsol, 2005].

Nel caso in cui si voglia imporre sul contorno della microstruttura la condizione 1) della (3.10), bisogna imporre che la fluttuazione sia nulla nei quattro lati dell'RVE. Tale condizione equivale ad imporre il seguente campo di spostamenti:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{e}}\mathbf{x} \quad (4.16)$$

In particolare tale condizione equivale ad imporre che lo spostamento sia lineare.

Nel caso in cui si vogliono imporre sul contorno dell'RVE le condizioni 2) o 3) della (3.10), bisogna imporre delle particolari equazioni di vincolo, al fine di eliminare i possibili moti rigidi per l'RVE. In particolare, nel caso della condizione 2), è stato imposto che il campo di fluttuazione $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ risulti nullo nei quattro spigoli della cella unitaria. Tale condizione, imposta puntualmente, implica che negli spigoli dell'RVE lo spostamento risulti lineare:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{e}}\mathbf{x} \quad (4.17)$$

Per realizzare la condizione di fluttuazioni periodiche sul contorno, occorre rendere disponibile, mediante una procedura di estrusione, il campo di spostamenti di un lato del contorno dell'RVE su quello ad esso opposto. Tale procedura di estrusione degli spostamenti consta sostanzialmente di due fasi. Nella prima viene definito il lato del contorno sorgente e la variabile che vuole estrudersi, mentre nella seconda occorre definire il contorno sul quale tale variabile dovrà essere resa disponibile, e cioè la sua destinazione. Tale procedura, quindi, proietta i valori di una qualsiasi variabile (nel nostro caso i campi di spostamento) da un lato, definito come sorgente, su di un altro definito come destinazione. Essendo le caratteristiche dei domini sorgente e destinazione dello stesso tipo, tale estrusione risulta essere di tipo puntuale, nel senso

che la proiezione di una variabile di spostamento da un lato su quello ad esso opposto viene fatta punto per punto. In tale ottica, possiamo osservare come tale trasformazione sia di tipo lineare.

Da un punto di vista formale tale procedura viene esplicitata attraverso la seguente relazione:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^+) = \mathbf{u}^-(\mathbf{x}^-) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \quad (4.18)$$

dove con $\mathbf{u}^-(\mathbf{x}^-)$ è stata indicata la variabile di spostamento estrusa da \mathbf{x}^+ ad \mathbf{x}^- , mentre con $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ si intende, al solito, la macrodeformazione applicata. La condizione di trazioni uniformi sul contorno può essere, invece, implementata definendo in alcuni vertici prestabiliti delle variabili integrali, le quali garantiscono il soddisfacimento dell'equazione (3.9). In particolare, in tali vertici fittizi, assegnati in maniera del tutto arbitraria, viene imposta l'uguaglianza tra la macrodeformazione imposta e la deformazione media, valutata all'interno dell'RVE mediante la seconda delle (3.4). Tale artificio consente di guidare anche tale problema, in cui la condizione al contorno è sulle trazioni, mediante una macrodeformazione assegnata. A questo punto, la suddetta condizione di tensioni uniformi ed omogenee sul contorno viene garantita, imponendo che le trazioni sul contorno stesso siano pari a:

$$\mathbf{t} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} \quad (4.19)$$

dove le $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ rappresentano, a loro volta, le tensioni medie valutate mediante la prima delle (3.4). Occorre osservare come la (4.19) venga imposta come condizione di tipo debole direttamente sul contorno dell'RVE. In tale situazione lo spostamento rigido della cella unitaria è stato impedito vincolando due vertici dell'RVE stesso.

4.2.1 Caso 1: Assenza di contatto tra le superfici delle microfratture

Nella prima applicazione, come evidenziato dalla Figura 4.29, la struttura composita 2D è soggetta allo spostamento Δ pari a $5h/1000$, dove h denota la dimensione della cella unitaria. Al contrario lungo il lato basso la struttura composita 2D è vincolata attraverso

un vincolo di tipo incastro. La lunghezza relativa della microfrattura, uguale per ogni cella unitaria, è posta pari a $l/h=0.125$. La struttura composita nell'analisi diretta è stata discretizzata con elementi triangolari quadratici, infittendo opportunamente la mesh lungo il contorno utilizzato per valutare l'integrale J . La Figura 4.30 mostra la mesh adottata per l'analisi diretta, che risulta caratterizzata da 62952 elementi triangolari e 259857 gradi di libertà.

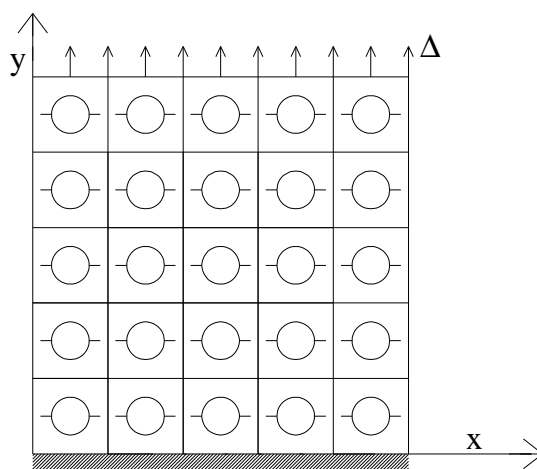


Figura 4.29 Schema geometrico per la struttura composita 2D costituita localmente dalla cella unitaria (assenza di contatto).

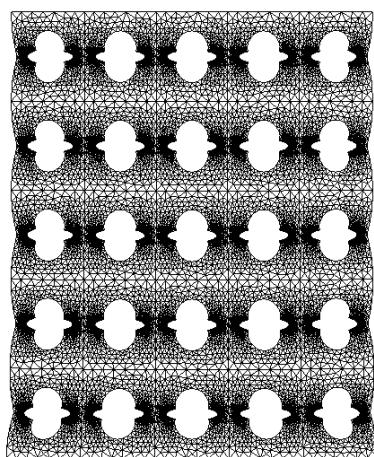


Figura 4.30 Deformata della mesh adottata per la struttura composita 2D (analisi diretta, assenza di contatto).

La figura 4.30 inoltre evidenzia come per questo tipo di condizione al contorno le facce delle microfratture non vanno mai in contatto. In Figura 4.31 viene diagrammata l'energia di rilascio adimensionalizzata ottenuta attraverso l'analisi diretta per ogni tipo di microfratture. Le cinque curve riportate rappresentano le energie di rilascio adimensionalizzate per le celle centrate lungo le linee $y=0.5h$; $1.5h$; $2.5h$; $3.5h$; $4.5h$. Al fine di adimensionalizzare l'energia di rilascio è stata utilizzata la seguente espressione:

$$\bar{G} = \frac{E_m \Delta^2 l (1 - \nu_m^2)}{H^2} \quad (4.17)$$

dove H rappresenta l'altezza complessiva della struttura composita pari a $5h$, E_m rappresenta il modulo di Young per la matrice della microstruttura porosa e ν_m il coefficiente di *Poisson*. In particolare sono adottati i seguenti valori:

$$\begin{cases} E_m = 30 \text{ GPa} \\ \nu_m = 0.17 \end{cases}$$

Nelle Figure 4.32 viene plottato il confronto, per le tre differenti condizioni al contorno, tra l'energia di rilascio adimensionalizzata valutata attraverso l'analisi diretta e attraverso l'analisi omogeneizzata. In questo caso per effetto della simmetria solo metà dei valori sono stati rappresentati.

La figura inoltre evidenzia la percentuale di errore relativa $e\%$ per ogni tipo di microfratture. Tale percentuale di errore è stata valutata come $[(G_{dir} - G_{hom}) / G_{dir}] \times 100$, dove G_{dir} e G_{hom} sono rispettivamente i valori dell'energia di rilascio nell'analisi diretta e nell'analisi omogeneizzata. La stessa figura evidenzia che la variazione dell'energia di rilascio in funzione dei tipi di microfratture è generalmente lieve fatta eccezione per la condizione al contorno di trazioni uniformi. È importante sottolineare che l'analisi degli errori effettuata per le tre condizioni al contorno evidenzia come l'errore percentuale è generalmente piccolo per la condizione al contorno di tipo periodico. Questi risultati sono in accordo con quanto stabilito in Hollister S. J. et al. (1992), dove l'accuratezza dell'approccio di omogeneizzazione è stato investigato in termini della variazione locale della densità di energia di rilascio.

Le più grandi percentuali di errori in valore assoluto ($|e\%|$) sono del 20.6%, 14.8% e 41.4% per le condizioni al contorno di spostamenti lineari, fluttuazioni periodiche e trazioni uniformi, rispettivamente.

Per effetto dei fenomeni di bordo, le più grandi percentuali di errori sono state rilevate in prossimità dell'incastro, lungo le celle centrate a $y=0.5h$, con l'unica eccezione per le celle situate a $x=0.875h$ e $x=4.125h$. In particolare per la condizione al contorno di trazioni uniformi, il più grande errore percentuale è stato ottenuto per le celle unitarie situate a $x=2.125h$, $x=2.875h$, con un errore pari al 41.4%. Al contrario per quanto riguarda la condizione al contorno di spostamenti lineari e condizioni al contorno di tipo periodico gli errori percentuali più elevati sono situati a $x=0.125h$, $x=4.875h$, con delle percentuali di errori pari al 20.6% e 14.8% rispettivamente.

La più piccola percentuale di errore è pari al 4.13% per le microfratture situate lungo $x=0.875h$ e $y=0.5h$, 0.02 % per la cella unitaria locata a $x=1.875h$ and $2.5h$, 0.17% per la cella unitaria locata a $x=1.125h$ and $y=4.5h$, per le condizioni al contorno di spostamenti lineari, di tipo periodico e di trazioni uniformi, rispettivamente. Ovviamente, lontano dai bordi ad una distanza pari a metà della cella unitaria gli errori assoluti diventano molto piccoli, come viene evidenziato dalle Figure 4.32, diventando più bassi di 7.54%, 3.32% e 16.9% rispettivamente per le condizioni al contorno di spostamenti lineari, condizioni al contorno di tipo periodico e trazioni uniformi. Vengono di seguito riportati i moduli macroscopici omogeneizzati ottenuti attraverso il primo step della procedura computazionale, relativi alle tre condizioni al contorno (i valori dei moduli sono espressi in MPa):

$$\begin{aligned}\bar{C}_{1111}(l) &= 20.008, & \bar{C}_{2222}(l) &= 14.392, & \bar{C}_{1122}(l) &= 3.5561, & \bar{C}_{1212}(l) &= 7.3951 \\ \bar{C}_{1111}(l) &= 19.801, & \bar{C}_{2222}(l) &= 14.080, & \bar{C}_{1122}(l) &= 3.3665, & \bar{C}_{1212}(l) &= 5.6436 \\ \bar{C}_{1111}(l) &= 16.211, & \bar{C}_{2222}(l) &= 9.1632, & \bar{C}_{1122}(l) &= 7.4036, & \bar{C}_{1212}(l) &= 4.6879\end{aligned}$$

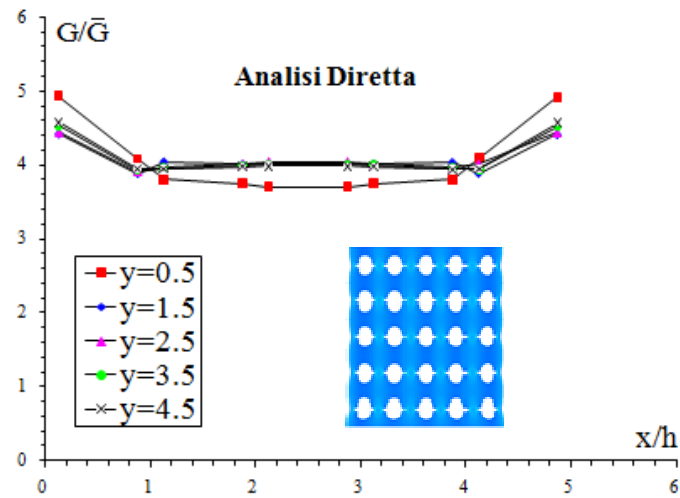


Figura 4.31 Energia di rilascio adimensionalizzata nell'analisi diretta (assenza di contatto).

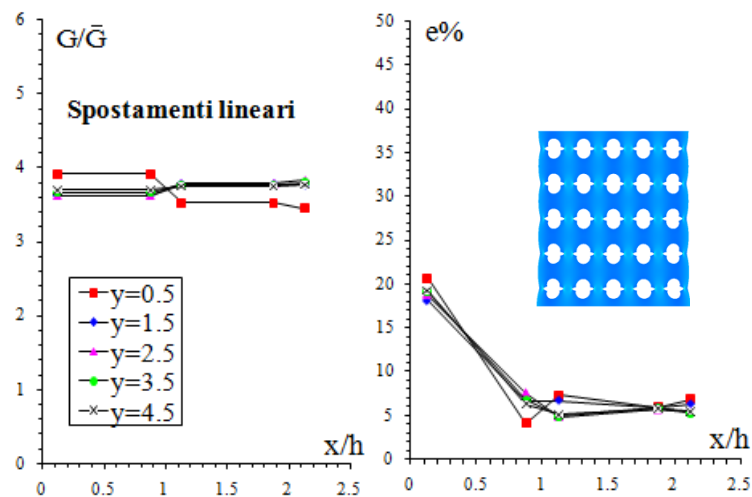


Figura 4.32a Confronto dell' energia di rilascio adimensionalizzata tra l'analisi diretta e l'analisi omogeneizzata per la condizione al contorno di spostamenti lineari.

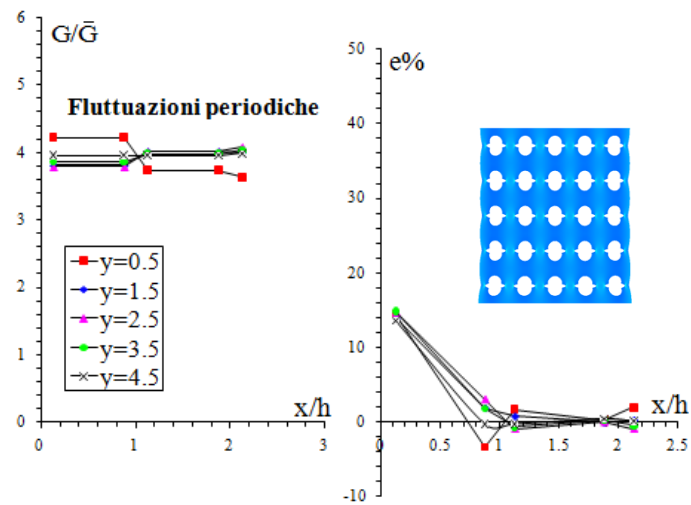


Figura 4.32b Confronto dell' energia di rilascio adimensionalizzata tra l'analisi diretta e l'analisi omogeneizzata per la condizione al contorno di fluttuazioni periodiche.

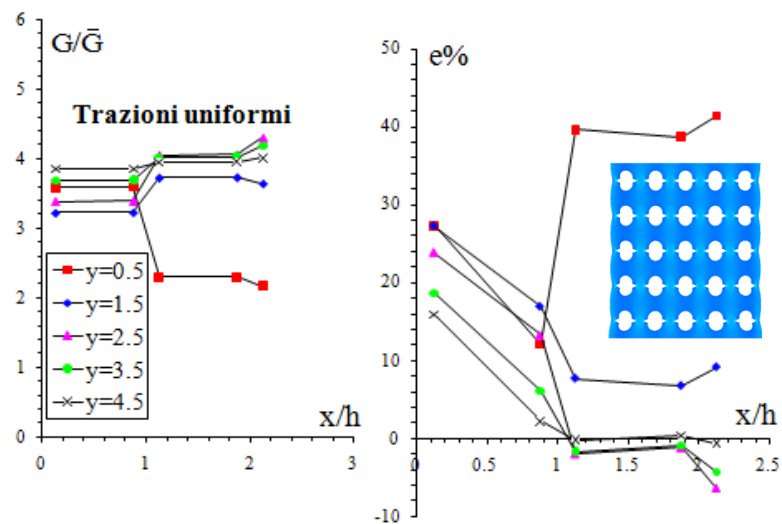


Figura 4.32c Confronto dell' energia di rilascio adimensionalizzata tra l'analisi diretta e l'analisi omogeneizzata per la condizione al contorno di trazioni uniformi.

4.2.2 Caso 2: Presenza di contatto tra le superfici delle microfratture

La seconda applicazione, come evidenziato dalla Figura 4.33, mostra una struttura 2D composta soggetta ad uno spostamento assegnato in direzione x ed è pari a $5h/1000$ applicato nel lato destro. Al contrario nel lato sinistro la condizione di vincolo imposta è quella di un incastro. Sul lato superiore e su quello inferiore la trazioni sono nulle. Per questo tipo di condizioni al contorno vi è la presenza di contatto tra le superfici delle microfratture. Anche in questo caso le analisi sono state effettuate per le stesse condizioni al contorno del caso precedente. La struttura composta è stata discretizzata con una mesh di elementi quadratici triangolari, infittendo anche in questo caso in modo opportuno la mesh lungo il percorso per valutare l'integrale J . La mesh adottata per le analisi, costituita da 174696 elementi e caratterizzata 721986 gradi di libertà, è plottata in Figura 4.34. Inoltre la Figura 4.34 evidenzia come lungo le superfici delle microfratture la mesh è stata opportunamente infittita con il fine di catturare in modo esatto i valori dello stato tensionale in presenza del contatto.

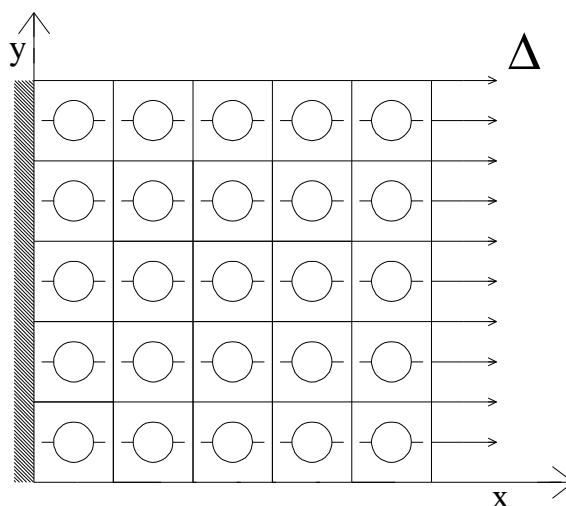


Figura 4.33 Schema geometrico per la struttura composta 2D costituita localmente dalla cella unitaria (presenza del contatto).

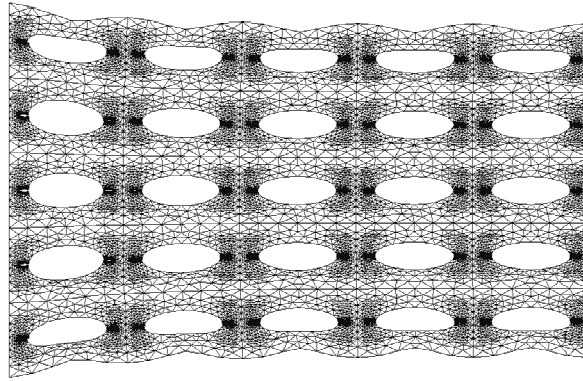


Figura 4.34 Deformata della mesh adottata per la struttura composita 2D (analisi diretta, presenza del contatto).

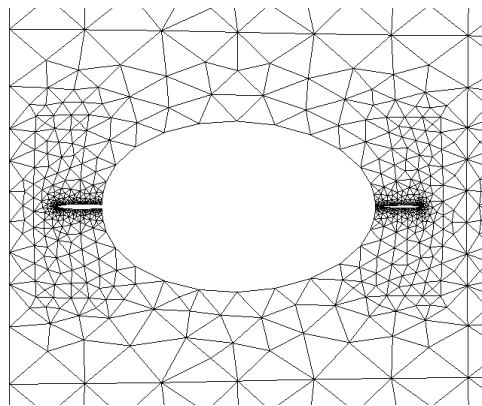


Figura 4.35 Particolare della deformata nell'analisi diretta per la cella locata a $x=0.5h$, $y=2.5h$.

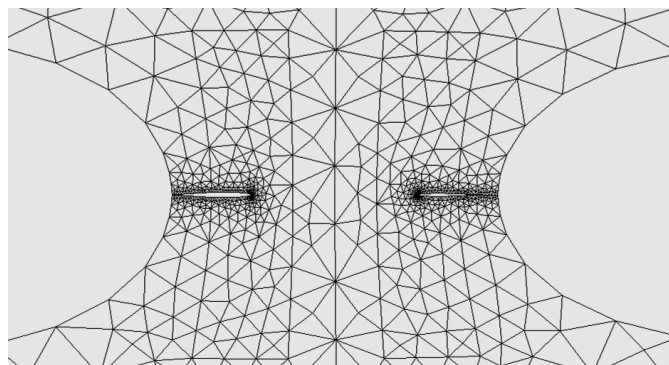


Figura 4.36 Microfrattura di sinistra e di destra corrispondente alla cella posizionata a $x=0.5h$, $y=1.5h$ e $x=1.5h$, $y=1.5h$.

L'analisi diretta non-lineare mostra che la configurazione di contatto varia da cella a cella. In particolare, per gli effetti di bordo, le microfratture risultano completamente

aperti in prossimità dell'incastro ($x=0.125h$, $y=1.5h$, $2.5h$, $3.5h$) come rappresentato dalla Figura 4.35. Al contrario per le celle situate lontano dall'incastro vi è la presenza di contatto tra le facce della microfratture, come rappresentato in Figura 4.36. Si può osservare in particolare come il contatto sia localizzato in prossimità del poro, al contrario lontano dal poro il crack risulta aperto. La procedura computazionale proposta al fine di ottenere i moduli omogeneizzati converge dopo tre cicli per tutte e tre le condizioni al contorno. Le componenti delle direzioni delle macro-deformazioni medie a convergenza sono pari a: $\hat{\epsilon}_{11}=9.84 \cdot 10^{-1}$, $\hat{\epsilon}_{22}=-1.779 \cdot 10^{-1}$; $\hat{\epsilon}_{11}=9.837 \cdot 10^{-1}$, $\hat{\epsilon}_{22}=-1.794 \cdot 10^{-1}$; $\hat{\epsilon}_{11}=9.259 \cdot 10^{-1}$, $\hat{\epsilon}_{22}=-3.777 \cdot 10^{-1}$;

I moduli omogeneizzati ottenuti a convergenza, per le tre condizioni al contorno sono pari a (i valori sono espressi in MPa) :

$$\begin{aligned}\bar{C}_{1111}(l) &= 20.075, & \bar{C}_{2222}(l) &= 19.859, & \bar{C}_{1122}(l) &= 4.1363, & \bar{C}_{1212}(l) &= 7.3950 \\ \bar{C}_{1111}(l) &= 19.875, & \bar{C}_{2222}(l) &= 19.004, & \bar{C}_{1122}(l) &= 3.9466, & \bar{C}_{1212}(l) &= 5.6382 \\ \bar{C}_{1111}(l) &= 16.282, & \bar{C}_{2222}(l) &= 16.247, & \bar{C}_{1122}(l) &= 7.4104, & \bar{C}_{1212}(l) &= 4.6774\end{aligned}$$

Il paragone con i moduli ottenuti in assenza di contatto mette in evidenza che la presenza del contatto tra le facce del crack produce un irrigidimento specialmente per quanto riguarda i moduli \bar{C}_{1122} and \bar{C}_{2222} .

La Figura 4.37 mostra i valori dell'energia di rilascio adimensionalizzata stimata attraverso l'analisi diretta per le tre condizioni al contorno. Le tre curve riportate in figura rappresentano i valori dell'energia di rilascio per i tipi delle microfratture locati a $y=0.5h$, $1.5h$ and $2.5h$. La presente condizione al contorno per la struttura composita (analisi diretta) produce valori simmetrici per i tipi delle microfratture locate a $y=3.5h$, $4.5h$, pertanto non sono stati rappresentati. Inoltre la Figura 4.37 evidenzia come dovuto alla rapida variazione della configurazione di contatto lontano dall'incastro, i valori dell'energia di rilascio decadono rapidamente. La Tabella 9 evidenzia come gli errori più piccoli in termini medi per quanto riguarda l'energia di rilascio sono stati ottenuti per le condizioni al contorno di fluttuazioni periodiche e trazioni antiperiodiche e sono pari al 39,76%. Le tabelle inoltre mettono in evidenza che gli errori percentuali

assoluti più grandi sono pari al 99.35%, 76.78% e 87.71% rispettivamente per le condizioni al contorno di spostamenti lineari, fluttuazioni periodiche e trazioni antiperiodiche e trazioni uniformi. L'unica eccezione si ha per i tipi delle microfratture situati a $y=0.5h$, $x=0.875h$ and $y=4.5h$, $x=0.875h$ dove si osserva una percentuale di errore superiore al 100%. In particolare gli errori che sono presenti in queste celle sono pari a 218.62%, 874.42% e 2640.76% rispettivamente per le condizioni al contorno di spostamenti lineari, fluttuazioni periodiche e trazioni antiperiodiche e trazioni uniformi. Questo è una dimostrazione del fatto che queste celle risentono molto degli effetti di bordo. Per gli effetti di bordo gli errori medi più grandi lungo le linee parallele all'asse y si anno in prossimità del lato a trazione nulla, quindi per $y=0.5h$, $y=4.5h$. Gli errori assoluti più piccoli si hanno per le celle unitarie situate a $x=0.875h$, $y=2.5h$, $x=3.125h$, $y=1.5h$, $x=3.125h$, $y=1.5h$, $x=0.125h$ con delle percentuali di errori assoluti pari al 10.75%, 4.62% and 4.45%, rispettivamente per le condizioni al contorno di spostamenti lineari, fluttuazioni periodiche e trazioni uniformi, rispettivamente.

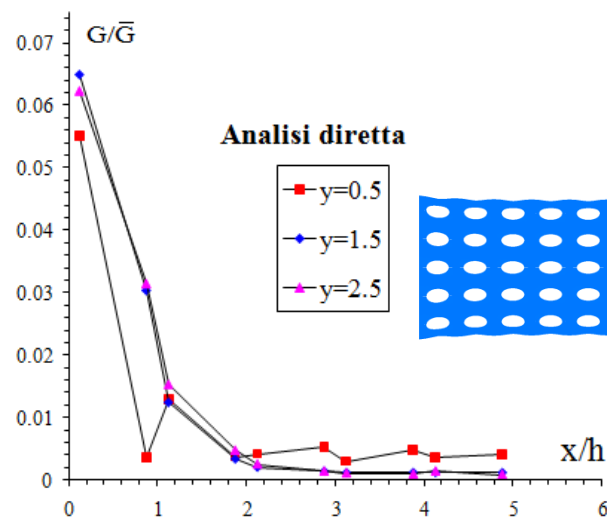


Figura 4.37 Energia di rilascio adimensionalizzata per l'analisi diretta (presenza del contatto).

	e% Spostamenti lineari										
x=	0.125	0.875	1.125	1.875	2.125	2.875	3.125	3.875	4.125	4.875	media e%
y=0.5	78.80	-218.62	99.02	96.15	99.02	98.85	98.54	98.68	99.24	98.85	108.58
y=1.5	61.67	17.95	94.49	79.04	98.66	96.58	95.86	94.22	97.37	95.88	83.17
y=2.5	55.00	10.75	92.96	76.86	99.02	97.01	97.74	95.28	98.07	94.65	81.73
y=3.5	61.67	17.95	94.49	79.04	98.66	96.58	95.86	94.22	97.37	95.88	83.17
y=4.5	78.80	-218.62	99.02	96.15	99.02	98.85	98.54	98.68	99.24	98.85	108.58
											93.05

	e% Fluttuazioni periodiche										
x=	0.125	0.875	1.125	1.875	2.125	2.875	3.125	3.875	4.125	4.875	media e%
y=0.5	35.09	-874.42	84.59	46.03	71.24	76.97	62.68	76.41	70.00	73.23	147.07
y=1.5	29.15	-51.65	54.01	-71.04	24.25	-11.47	4.62	5.30	14.11	12.59	27.82
y=2.5	13.57	-71.36	53.43	-50.58	30.51	-27.94	6.52	-10.32	34.52	-5.03	30.38
y=3.5	29.15	-51.65	54.01	-71.04	24.25	-11.47	4.62	5.30	14.11	12.59	27.82
y=4.5	35.09	-874.42	84.59	46.03	71.24	76.97	62.68	76.41	70.00	73.23	147.07
											76.03

	e% Trazioni uniformi										
x=	0.125	0.875	1.125	1.875	2.125	2.875	3.125	3.875	4.125	4.875	media e%
y=0.5	-83.15	-2640.76	86.50	54.41	74.46	80.33	67.88	80.44	81.21	84.15	333.33
y=1.5	-4.45	-122.02	45.79	-96.53	46.71	25.75	9.25	12.77	44.50	46.49	45.43
y=2.5	36.07	-25.07	66.51	-3.72	56.03	24.15	43.86	37.17	60.55	40.25	39.34
y=3.5	-4.45	-122.02	45.79	-96.53	46.71	25.75	9.25	12.77	44.50	46.49	45.43
y=4.5	-83.15	-2640.76	86.50	54.41	74.46	80.33	67.88	80.44	81.21	84.15	333.33
											159.37

Tabella 9 Percentuali di errori relativi alle energie di rilascio tra l'analisi diretta (incastro) e l'analisi omogeneizzata per le tre condizioni al contorno.

Al fine di isolare il contributo dovuto alle non-linearità per la presenza del contatto tra le facce delle microfratture per l'effetto di gradienti macroscopici, è stata analizzata una seconda condizione al contorno. Tale condizione è stata realizzata sostituendo il vincolo incastro con un vincolo rullo ed impedendo inoltre al provino di subire spostamenti verticali vincolandone un nodo sul lato sinistro (Figura 4.38). Tale condizione al contorno assicura una deformazione uniforme.

Dalla Figura 4.38 si può osservare come l'andamento dell'energia di rilascio opportunamente adimensionalizzate lungo y esibiscono una variazione lieve rispetto alla condizione al contorno in cui era presente l'incastro.

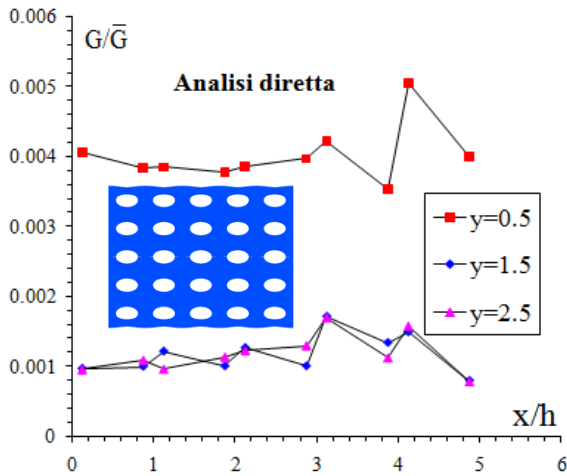


Figura 4.38 Analisi diretta in assenza di gradienti macroscopici: distribuzione delle energie di rilascio adimensionalizzate (presenza del contatto).

e% Spostamenti lineari											
x=	0.125	0.875	1.125	1.875	2.125	2.875	3.125	3.875	4.125	4.875	media e%
y=0.5	99.19	99.14	99.14	99.13	99.14	99.17	99.22	99.07	99.35	99.18	99.17
y=1.5	96.58	96.68	97.28	96.70	97.39	96.70	98.08	97.53	97.79	95.83	97.19
y=2.5	96.55	96.98	96.58	97.10	97.30	97.46	98.06	97.06	97.91	95.80	97.22
y=3.5	96.58	96.68	97.28	96.70	97.39	96.70	98.08	97.53	97.79	95.83	97.19
y=4.5	99.19	99.14	99.14	99.13	99.14	99.17	99.22	99.07	99.35	99.18	99.17
											97.99

e% Fluttuazioni periodiche											
x=	0.125	0.875	1.125	1.875	2.125	2.875	3.125	3.875	4.125	4.875	media e%
y=0.5	71.10	69.40	69.53	68.97	69.56	70.46	72.20	66.87	76.78	70.70	70.56
y=1.5	-21.56	-18.23	3.17	-17.44	7.11	-17.49	31.53	12.20	21.23	-48.55	19.85
y=2.5	-22.81	-7.48	-21.74	-3.36	4.07	9.62	30.91	-4.54	25.59	-49.63	17.98
y=3.5	-21.56	-18.23	3.17	-17.44	7.11	-17.49	31.53	12.20	21.23	-48.55	19.85
y=4.5	71.10	69.40	69.53	68.97	69.56	70.46	72.20	66.87	76.78	70.70	70.56
											39.76

e% Uniform Traction											
x=	0.125	0.875	1.125	1.875	2.125	2.875	3.125	3.875	4.125	4.875	media e%
y=0.5	84.70	83.81	83.87	83.57	83.89	84.37	85.29	82.46	87.71	84.49	84.42
y=1.5	35.66	37.42	48.75	37.84	50.83	37.82	63.76	53.53	58.31	21.37	44.53
y=2.5	35.00	43.11	35.56	45.29	49.23	52.16	63.43	44.67	60.62	20.81	44.99
y=3.5	35.66	37.42	48.75	37.84	50.83	37.82	63.76	53.53	58.31	21.37	44.53
y=4.5	84.70	83.81	83.87	83.57	83.89	84.37	85.29	82.46	87.71	84.49	84.42
											60.58

Tabella 10 Percentuali di errori relative alle energie di rilascio tra l'analisi diretta (rullo) e l'analisi omogeneizzata per le tre condizioni al contorno.

Come evidenziato dalla Tabella 10, i più grandi errori percentuali in valore assoluto $|e\%|$ sono pari a 99.35%, 76.77% and 87.71% per la condizione al contorno di spostamenti lineari, fluttuazioni periodiche e trazioni uniformi, rispettivamente. A causa degli effetti di bordo gli errori massimi più grandi si hanno lungo le linee parallele all'asse y in corrispondenza dei bordi ($y=0.5h$, $y=4.5h$). Lontano dal bordo, per una distanza pari a metà della dimensione della cella unitaria, gli errori diventano più piccoli attestandosi sui seguenti valori 31.53% and 63.76%, rispettivamente per le condizioni al contorno 2) e 3). Per quanto riguarda la condizione al contorno 1) gli errori rimangono grandi con la stessa percentuale di errore del caso precedente (circa il 98.05%).

Tali risultati hanno evidenziato che sebbene gli effetti di bordo spariscono considerando questa condizione di vincolo permettendo alle deformazioni macroscopiche di assumere valori uniformi nel provino omogeneizzato, l'influenza del contatto nel confronto con la struttura composita (analisi diretta) in termini di energia di rilascio rimane elevata.

Pertanto, in presenza di gradienti di deformazione e di tensione macroscopici, le non-linearità per effetto del contatto incrementano notevolmente le percentuali di errori tra l'analisi diretta e l'analisi omogeneizzata. La presenza del contatto gioca molto un ruolo fondamentale nel confronto tra le due analisi.

Appendice 4.1 Energia iperelastica Gent

Nella presente appendice viene illustrato come ricavare per via analitica il primo tensore di *Piola-Kirchhoff* e il tensore dei moduli nominali attraverso la densità di energia di deformazione tipo Gent. Il primo tensore di *Piola-Kirchhoff* è dato dalla seguente relazione:

$$\mathbf{T}_R = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \quad (\text{A1})$$

Prima di ricavare \mathbf{T}_R è opportuno riportare alcune derivate:

$$\frac{\partial \ln \left(\frac{J_m + 3 - \|\mathbf{F}\|^2}{J_m} \right)}{\partial \mathbf{F}} = \frac{J_m}{J_m + 3 - \|\mathbf{F}\|^2} \frac{\partial \left(\frac{J_m + 3 - \|\mathbf{F}\|^2}{J_m} \right)}{\partial \mathbf{F}} = \frac{-2\mathbf{F}}{J_m + 3 - \|\mathbf{F}\|^2} \quad (\text{A2})$$

$$\frac{\partial \ln(\det \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A3})$$

$$\frac{\partial (J-1)^2}{\partial \mathbf{F}} = 2(J-1) \frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = 2(J-1) \frac{\partial \det \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} = 2(J-1) \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} = 2(J-1) \mathbf{J} \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A4})$$

Il primo tensore di *Piola-Kirchhoff* per la densità di energia di deformazione Gent è dato da:

$$\mathbf{T}_R = \frac{-\mu}{2} \left[-J_m \frac{2\mathbf{F}}{J_m + 3 - \|\mathbf{F}\|^2} + 2\mathbf{F}^{-T} \right] + \left(\frac{k-\mu}{2} - \frac{\mu}{J_m} \right) 2(J-1) \mathbf{J} \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A5})$$

Il tensore dei moduli nominali è dato da:

$$C_{Rijhk} = \frac{\partial T_{Rij}}{\partial F_{hk}}$$

Si introducono alcune derivate utili a ricavare il tensore dei moduli nominali:

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{-T}}{\partial \mathbf{F}} = -\mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A6})$$

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = J \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A7})$$

Ponendo $\lambda = k - \mu$, si ottiene in definitiva:

$$\begin{aligned} C_{Rijhk} = & 2\mu \frac{1}{\left(1 - \frac{I-3}{J_m}\right)^2} \frac{1}{J_m} F_{hk} F_{ij} + \frac{\mu}{\left(1 - \frac{I-3}{J_m}\right)} \delta_{ih} \delta_{jk} + \mu F_{ik}^{-T} F_{hj}^{-T} \\ & + \left(\lambda - \frac{2\mu}{J_m}\right) J^2 F_{ij}^{-T} F_{hk}^{-T} + \left(\lambda - \frac{2\mu}{J_m}\right) (J-1) J F_{hk}^{-T} F_{ij}^{-T} - \left(\lambda - \frac{2\mu}{J_m}\right) (J-1) J F_{ik}^{-T} F_{hj}^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

Ed in forma indiciale l'espressione (A8) diventa:

Appendice 4.2 Energia iperelastica Neo-Hookean

Nella presente appendice partendo dalla densità di energia di deformazione tipo Neo-Hookean definita dalla (4.13), vengono esplicitati il primo tensore di *Piola-Kirchhoff* e il tensore dei moduli nominali, i quali sono dati dalle seguenti relazioni:

$$\mathbf{T}_R = \mu \mathbf{F} - \mu \mathbf{F}^{-T} + (k - \mu)(J - 1) J \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A8})$$

$$\begin{aligned} C_{Rijhk} = \frac{\partial T_{Rij}}{\partial F_{hk}} = & \mu \delta_{ij} \delta_{hk} + \mu F_{ik}^{-T} F_{hj}^{-T} + (k - \mu) J^2 F_{ij}^{-T} F_{hk}^{-T} + \\ & + (k - \mu)(J - 1) J F_{hk}^{-T} F_{ij}^{-T} - (k - \mu)(J - 1) J F_{ik}^{-T} F_{hj}^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

Per ottenere le presenti relazioni si sono utilizzate le derivate ricavate in Appendice 4.1.

Appendice 4.3 COMSOL-SCRIPT analisi di stabilità macroscopica

Il seguente listato illustra una parte del codice realizzato in COMSOL SCRIPT al fine di ricavare l'analisi di stabilità macroscopica associata alle diverse misure coniugate di deformazione adottate. Tale procedura viene inserita in cascata una volta risolto il problema di equilibrio ed il problema incrementale di equilibrio sulla cella unitaria.

```

for i=1:(length(vettpar));
    Cr =[Cr1111(i) Cr1122(i) Cr1112(i) Cr1121(i);
          Cr2211(i) Cr2222(i) Cr2212(i) Cr2221(i);
          Cr1211(i) Cr1222(i) Cr1212(i) Cr1221(i);
          Cr2111(i) Cr2122(i) Cr2112(i) Cr2121(i)];
    detCr(i)=det(Cr);
    lambCr=eig(Cr);
    AutoOrd=sort(lambCr);
    lambCr1(i)=AutoOrd(1);
    lambCr2(i)=AutoOrd(2);
    lambCr3(i)=AutoOrd(3);
    lambCr4(i)=AutoOrd(4);
    lambminCr(i)=min(lambCr);
end

determF=Fs11.*Fs22-Fs12.*Fs21;

for i=1:(length(vettpar));
    C0r1111(i)=(Cr1111(i)*Fs11(i)*Fs11(i)+Cr1112(i)*Fs11(i)*Fs12(i)+Cr1211(i)*Fs12(i)*Fs11(i)+Cr1212(i)*Fs12(i)*Fs12(i))/determF(i);
    C0r2211(i)=(Cr2111(i)*Fs21(i)*Fs11(i)+Cr1112(i)*Fs12(i)*Fs21(i)+Fs11(i)*Fs22(i)*Cr2211(i)+Fs12(i)*Fs22(i)*Cr2212(i))/determF(i);
    C0r1211(i)=(Cr1111(i)*Fs11(i)*Fs21(i)+Fs12(i)*Fs21(i)*Cr1112(i)+Fs11(i)*Fs22(i)*Cr1211(i)+Fs12(i)*Fs22(i)*Cr1212(i))/determF(i);
    C0r2111(i)=(Cr2111(i)*Fs11(i)*Fs11(i)+Fs11(i)*Fs12(i)*Cr2112(i)+Fs11(i)*Fs12(i)*Cr2211(i)+Fs12(i)*Fs12(i)*Cr2212(i))/determF(i);
    C0r1122(i)=(Cr1121(i)*Fs11(i)*Fs21(i)+Fs11(i)*Fs22(i)*Cr1122(i)+Fs12(i)*Fs21(i)*Cr1221(i)+Fs12(i)*Fs22(i)*Cr1222(i))/determF(i);
    C0r2222(i)=(Cr2121(i)*Fs21(i)*Fs21(i)+Fs21(i)*Fs22(i)*Cr2122(i)+Fs21(i)*Fs22(i)*Cr2221(i)+Fs22(i)*Fs22(i)*Cr2222(i))/determF(i);
    C0r1222(i)=(Cr1121(i)*Fs21(i)*Fs21(i)+Fs21(i)*Fs22(i)*Cr1122(i)+Fs21(i)*Fs22(i)*Cr1221(i)+Fs22(i)

```



```

*Fs22(i)*Cr1222(i))/determF(i);
C0r2122(i)=(Cr2121(i)*Fs11(i)*Fs21(i)+Fs11(i)*Fs22(i)*Cr2122(i)+Fs12(i)*Fs21(i)*Cr2221(i)+Fs12(i)
*Fs22(i)*Cr2222(i))/determF(i);
C0r1112(i)=(Cr1111(i)*Fs11(i)*Fs21(i)+Fs11(i)*Fs22(i)*Cr1112(i)+Fs12(i)*Fs21(i)*Cr1211(i)+Fs12(i)
*Fs22(i)*Cr1212(i))/determF(i);
C0r2212(i)=(Cr2111(i)*Fs21(i)*Fs21(i)+Fs21(i)*Fs22(i)*Cr2112(i)+Fs21(i)*Fs22(i)*Cr2211(i)+Fs22(i)
*Fs22(i)*Cr2212(i))/determF(i);
C0r1212(i)=(Cr1111(i)*Fs21(i)*Fs21(i)+Fs21(i)*Fs22(i)*Cr1112(i)+Fs21(i)*Fs22(i)*Cr1211(i)+Fs22(i)
*Fs22(i)*Cr1212(i))/determF(i);

C0r2112(i)=(Cr2111(i)*Fs11(i)*Fs21(i)+Fs11(i)*Fs22(i)*Cr2112(i)+Fs12(i)*Fs21(i)*Cr2211(i)+Fs12(i)
*Fs22(i)*Cr2212(i))/determF(i);
C0r1121(i)=(Cr1121(i)*Fs11(i)*Fs11(i)+Fs11(i)*Fs12(i)*Cr1122(i)+Fs11(i)*Fs12(i)*Cr1221(i)+Fs12(i)
*Fs12(i)*Cr1222(i))/determF(i);

C0r2221(i)=(Cr2121(i)*Fs21(i)*Fs11(i)+Fs12(i)*Fs21(i)*Cr2122(i)+Fs11(i)*Fs22(i)*Cr2221(i)+Fs12(i)
*Fs22(i)*Cr2222(i))/determF(i);
C0r1221(i)=(Cr1121(i)*Fs11(i)*Fs21(i)+Fs12(i)*Fs21(i)*Cr1122(i)+Fs11(i)*Fs22(i)*Cr1221(i)+Fs12(i)
*Fs22(i)*Cr1222(i))/determF(i);
C0r2121(i)=(Cr2121(i)*Fs11(i)*Fs11(i)+Fs11(i)*Fs12(i)*Cr2122(i)+Fs11(i)*Fs12(i)*Cr2221(i)+Fs12(i)
*Fs12(i)*Cr2222(i))/determF(i);

end

for i=1:(length(vettpar));

    C0r =[C0r1111(i) C0r1122(i) C0r1112(i) C0r1121(i);
          C0r2211(i) C0r2222(i) C0r2212(i) C0r2221(i);
          C0r1211(i) C0r1222(i) C0r1212(i) C0r1221(i);
          C0r2111(i) C0r2122(i) C0r2112(i) C0r2121(i)];

    detC0r(i)=det(C0r);
    lambC0r=eig(C0r);
    AutoOrd=sort(lambC0r);
    lambC0r1(i)=AutoOrd(1);
    lambC0r2(i)=AutoOrd(2);
    lambC0r3(i)=AutoOrd(3);
    lambC0r4(i)=AutoOrd(4);
    lambminC0r(i)=min(lambC0r);

end

Fs33=1
J=Fs11.*Fs22.*Fs33-Fs12.*Fs21.*Fs33;

for i=1:(length(vettpar));

    Ts1111(i)=J(i)^(-1)*(Fs11(i)*Tsr1111(i)+Fs12(i)*Tsr1211(i));

```

```

Ts2211(i)=J(i)^(-1)*(Fs21(i)*Tsr2111(i)+Fs22(i)*Tsr2211(i));
Ts1211(i)=J(i)^(-1)*(Fs21(i)*Tsr1111(i)+Fs22(i)*Tsr1211(i));
Ts2111(i)=J(i)^(-1)*(Fs11(i)*Tsr2111(i)+Fs12(i)*Tsr2211(i));
%----MISURA DI BIOT-----
C0I1111(i)=C0r1111(i);
C0I2211(i)=C0r2211(i);
C0I1211(i)=C0r1211(i)-Ts1211(i)/2;
C0I2111(i)=C0r2111(i)+Ts2111(i)/2;
C0I1122(i)=C0r1122(i);
C0I2222(i)=C0r2222(i);
C0I1222(i)=C0r1222(i)+Ts1211(i)/2;
C0I2122(i)=C0r2122(i)-Ts2111(i)/2;
C0I1112(i)=C0r1112(i)+Ts1211(i)/4+Ts2111(i)/4-Ts2111(i);
C0I2212(i)=C0r2212(i)+Ts2111(i)/4+Ts1211(i)/4;
C0I1212(i)=C0r1212(i)+Ts1111(i)/4-3*Ts2211(i)/4;
C0I2112(i)=C0r2112(i)+Ts1111(i)/4+Ts2211(i)/4;
C0I1121(i)=C0r1121(i)+Ts1211(i)/4+Ts2111(i)/4;
C0I2221(i)=C0r2221(i)+Ts2111(i)/4+Ts1211(i)/4-Ts1211(i);
C0I1221(i)=C0r1221(i)+Ts1111(i)/4+Ts2211(i)/4;
C0I2121(i)=C0r2121(i)-3*Ts1111(i)/4+Ts2211(i)/4;
%----Misura Green-Lagrange-----
C0II1111(i)=C0r1111(i)-Ts1111(i);
C0II2211(i)=C0r2211(i);
C0II1211(i)=C0r1211(i)-Ts1211(i);
C0II2111(i)=C0r2111(i);
C0II1122(i)=C0r1122(i);
C0II2222(i)=C0r2222(i)-Ts2211(i);
C0II1222(i)=C0r1222(i);
C0II2122(i)=C0r2122(i)-Ts2111(i);
C0II1112(i)=C0r1112(i)-Ts2111(i);
C0II2212(i)=C0r2212(i);
C0II1212(i)=C0r1212(i)-Ts2211(i);
C0II2112(i)=C0r2112(i);

```

```

C0I1121(i)=C0r1121(i);
C0I2221(i)=C0r2221(i)-Ts1211(i);
C0I1221(i)=C0r1221(i);
C0I2121(i)=C0r2121(i)-Ts1111(i);
%---MISURA LOGARITMICA-----
C001111(i)=C0r1111(i)+Ts1111(i);
C002211(i)=C0r2211(i);
C001211(i)=C0r1211(i);
C002111(i)=C0r2111(i)+Ts2111(i);
C001122(i)=C0r1122(i);
C002222(i)=C0r2222(i)+Ts2211(i);
C001222(i)=C0r1222(i)+Ts1211(i);
C002122(i)=C0r2122(i);
C001112(i)=C0r1112(i)+(1/2)*Ts1211(i)-(1/2)*Ts2111(i);
C002212(i)=C0r2212(i)+(1/2)*Ts1211(i)+(1/2)*Ts2111(i);
C001212(i)=C0r1212(i)+(1/2)*Ts1111(i)-(1/2)*Ts2211(i);
C002112(i)=C0r2112(i)+(1/2)*Ts1111(i)+(1/2)*Ts2211(i);
C001121(i)=C0r1121(i)+(1/2)*Ts1211(i)+(1/2)*Ts2111(i);
C002221(i)=C0r2221(i)-(1/2)*Ts1211(i)+(1/2)*Ts2111(i);
C001221(i)=C0r1221(i)+(1/2)*Ts1111(i)+(1/2)*Ts2211(i);
C002121(i)=C0r2121(i)-(1/2)*Ts1111(i)+(1/2)*Ts2211(i);
%---Misura MENOUNO-----
C0_I1111(i)=C0r1111(i)+2*Ts1111(i);
C0_I2211(i)=C0r2211(i);
C0_I1211(i)=C0r1211(i)+(1/2)*Ts1211(i);
C0_I2111(i)=C0r2111(i)+(3/2)*Ts2111(i);
C0_I1122(i)=C0r1122(i);
C0_I2222(i)=C0r2222(i)+2*Ts2211(i);
C0_I1222(i)=C0r1222(i)+(3/2)*Ts1211(i);
C0_I2122(i)=C0r2122(i)+(1/2)*Ts2111(i);
C0_I1112(i)=C0r1112(i)+(3/4)*(Ts1211(i)+Ts2111(i))-Ts2111(i);
C0_I2212(i)=C0r2212(i)+(3/4)*(Ts1211(i)+Ts2111(i));
C0_I1212(i)=C0r1212(i)+(3/4)*(Ts1111(i)+Ts2211(i))-Ts2211(i);

```

```

C0_I2112(i)=C0r2112(i)+(3/4)*(Ts1111(i)+Ts2211(i));
C0_I1121(i)=C0r1121(i)+(3/4)*(Ts1211(i)+Ts2111(i));
C0_I2221(i)=C0r2221(i)+(3/4)*(Ts1211(i)+Ts2111(i))-Ts1211(i);
C0_I1221(i)=C0r1221(i)+(3/4)*(Ts1111(i)+Ts2211(i));
C0_I2121(i)=C0r2121(i)+(3/4)*(Ts1111(i)+Ts2211(i))-Ts1111(i);
%----MISURA MENODUE-----
C0_II1111(i)=C0r1111(i)+3*Ts1111(i);
C0_II2211(i)=C0r2211(i);
C0_II1211(i)=C0r1211(i)+Ts1211(i);
C0_II2111(i)=C0r2111(i)+2*Ts2111(i);
C0_II1122(i)=C0r1122(i);
C0_II2222(i)=C0r2222(i)+3*Ts2211(i);
C0_II1222(i)=C0r1222(i)+2*Ts1211(i);
C0_II2122(i)=C0r2122(i)+Ts2111(i);
C0_II1112(i)=C0r1112(i)+Ts1211(i);
C0_II2212(i)=C0r2212(i)+Ts1211(i)+Ts2111(i);
C0_II1212(i)=C0r1212(i)+Ts1111(i);
C0_II2112(i)=C0r2112(i)+Ts1111(i)+Ts2211(i);
C0_II1121(i)=C0r1121(i)+Ts1211(i)+Ts2111(i);
C0_II2221(i)=C0r2221(i)+Ts2111(i);
C0_II1221(i)=C0r1221(i)+Ts1111(i)+Ts2211(i);
C0_II2121(i)=C0r2121(i)+Ts2211(i);
end
for i=1:(length(vettpar));
%----MISURA DI BIOT-----
C0I =[C0I1111(i) C0I1122(i) 0;
      C0I2211(i) C0I2222(i) 0;
      0 0 2*C0I1212(i)];
detC0I(i)=det(C0I);
lambC0I=eig(C0I);
AutoOrd=sort(lambC0I);
lambC0I1(i)=AutoOrd(1);
lambC0I2(i)=AutoOrd(2);

```

```

    lambC0I3(i)=AutoOrd(3);
    lambminC0I(i)=min(lambC0I);
%-----MISURA DI GREEN-LAGRANGE-----
C0II =[C0II1111(i) C0II1122(i) 0;
        C0II2211(i) C0II2222(i) 0;
        0 0 2*C0II1212(i)];
detC0II(i)=det(C0II);
lambC0II=eig(C0II);
AutoOrd=sort(lambC0II);
lambC0II1(i)=AutoOrd(1);
lambC0II2(i)=AutoOrd(2);
lambC0II3(i)=AutoOrd(3);
lambminC0II(i)=min(lambC0II);
%-----MISURA LOGARITMICA-----
C00 =[C001111(i) C001122(i) 0;
        C002211(i) C002222(i) 0;
        0 0 2*C001212(i)];
detC00(i)=det(C00);
lambC00=eig(C00);
AutoOrd=sort(lambC00);
lambC001(i)=AutoOrd(1);
lambC002(i)=AutoOrd(2);
lambC003(i)=AutoOrd(3);
lambminC00(i)=min(lambC00);
%-----MISURA MENOUNO-----
C0_I =[C0_I1111(i) C0_I1122(i) 0;
        C0_I2211(i) C0_I2222(i) 0;
        0 0 2*C0_I1212(i)];
detC0_I(i)=det(C0_I);
lambC0_I=eig(C0_I);
AutoOrd=sort(lambC0_I);
lambC0_I1(i)=AutoOrd(1);
lambC0_I2(i)=AutoOrd(2);

```

```

lambC0_I3(i)=AutoOrd(3);
lambminC0_I(i)=min(lambC0_I);
%-----MISURA MENODUE-----
C0_II =[C0_II1111(i) C0_II1122(i) 0;
        C0_II2211(i) C0_II2222(i) 0;
        0 0 2*C0_II1212(i)];
detC0_II(i)=det(C0_II);
lambC0_II=eig(C0_II);
AutoOrd=sort(lambC0_II);
lambC0_II1(i)=AutoOrd(1);
lambC0_II2(i)=AutoOrd(2);
lambC0_II3(i)=AutoOrd(3);
lambminC0_II(i)=min(lambC0_II);
end
num=100;
dteta=(2*pi)/num;
vettnum=[1:1:num+1];
for i=1:(length(vettpar));
    teta=0;
    for j=1:(num+1);
        n1(j)=cos(teta);
        n2(j)=sin(teta);
        Qs11=Cr1111(i)*n1(j)^2+Cr1112(i)*n1(j)*n2(j)+Cr1212(i)*n2(j)^2+Cr1211(i)*n2(j)*n1(j);
        Qs12=Cr1121(i)*n1(j)^2+Cr1122(i)*n1(j)*n2(j)+Cr1222(i)*n2(j)^2+Cr1221(i)*n2(j)*n1(j);
        Qs22=Cr2121(i)*n1(j)^2+Cr2122(i)*n1(j)*n2(j)+Cr2222(i)*n2(j)^2+Cr2221(i)*n2(j)*n1(j);
        Qs21=Cr2111(i)*n1(j)^2+Cr2112(i)*n1(j)*n2(j)+Cr2212(i)*n2(j)^2+Cr2211(i)*n2(j)*n1(j);
        Q0s11=C0r1111(i)*n1(j)^2+C0r1112(i)*n1(j)*n2(j)+C0r1212(i)*n2(j)^2+C0r1211(i)*n2(j)*n1(j);
        Q0s12=C0r1121(i)*n1(j)^2+C0r1122(i)*n1(j)*n2(j)+C0r1222(i)*n2(j)^2+C0r1221(i)*n2(j)*n1(j);
        Q0s22=C0r2121(i)*n1(j)^2+C0r2122(i)*n1(j)*n2(j)+C0r2222(i)*n2(j)^2+C0r2221(i)*n2(j)*n1(j);
        Q0s21=C0r2111(i)*n1(j)^2+C0r2112(i)*n1(j)*n2(j)+C0r2212(i)*n2(j)^2+C0r2211(i)*n2(j)*n1(j);
        Qs=[Qs11 Qs12;
            Qs21 Qs22];
        detQs(j)=det(Qs);
    end
end

```

```
    lambminTetaQs(j)=min(eig(Qs));  
    Q0s=[Q0s11 Q0s12;  
        Q0s21 Q0s22];  
    detQ0s(j)=det(Q0s);  
    lambminTetaQ0s(j)=min(eig(Q0s));  
    teta=teta+dteta;  
end  
detminQs(i)=min(detQs);  
lambminParQs(i)=min(lambminTetaQs);  
detminQ0s(i)=min(detQ0s);  
lambminParQ0s(i)=min(lambminTetaQ0s);  
end
```